Lineare Algebra II – 8. Übungsblatt

(Abgabe bis 14.6.2016)

---

1. Wir betrachten die Bilinearform β auf $\mathbb{R}^3$, die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
dargestellt wird.
   (a) Bestimmen Sie die Signatur von β.
   (b) Ist β ein inneres Produkt? Begründung?
   (c) Ist β nichtdegeneriert? Begründung?
   (d) Bestimmen Sie einen maximalen Unterraum W von V, sodass $\beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \in W$. Ist W eindeutig? Mit Begründung.

   (3 Punkte)

2. Seien $A, B \in M(n, n; \mathbb{R})$ symmetrisch. Wir betrachten die Aussagen
   (a) A und B haben die gleichen Anzahlen positiver und negativer Eigenwerte.
   (b) Es gibt $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $C^t AC = B$.

   Beweisen oder widerlegen Sie die Implikationen (a)$\Rightarrow$(b), (a)$\Leftarrow$(b), (a)$\Leftrightarrow$(b).

   (3 Punkte)

3. Sei β eine symmetrische Bilinearform der Signatur $\sigma(\beta) = (r_+, r_-, r_0)$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Sei $r_+ > 0$. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen
   (a) $r_+ = n$,
   (b) β ist positiv definit,
   (c) Es gibt genau einen Unterraum $W_+ \subset V$, sodass $\beta|_{W_+}$ positiv definit ist und $\dim_{\mathbb{R}} W_+ = r_+$.

   (3 Punkte)

4. Sei β eine symmetrische Bilinearform der Signatur $\sigma(\beta) = (r_+, r_-, 0)$ auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V.
   (a) Seien W_+, W_- Unterräume von V, sodass $\beta|_{W_+}$ positiv definit ist, $\beta|_{W_-}$ negativ definit ist, und $\dim_{\mathbb{R}} W_+ = r_+$, $\dim_{\mathbb{R}} W_- = r_-$. Zeigen Sie, dass $V = W_+ \oplus W_-$.
   (b) Sei $W \subset V$ ein Unterraum mit $\beta|_W$ positiv definit und $\dim_{\mathbb{R}} W = r_+$. Zeigen Sie, dass dann $\beta|_{W^\perp}$ negativ definit und $\dim_{\mathbb{R}} W^\perp = r_-$ gilt.

   (3 Punkte)