Lineare Algebra II – 7. Übungsblatt

(Abgabe bis 7.6.2016)

---

1. Betrachte die quadratischen Formen
$$Q_1(x,y) = x^2 + y^2, \quad Q_2(x,y) = 3x^2 + 3y^2$$
auf K^2. Zeigen Sie:
   (a) Wenn $\operatorname{char} K \neq 3$, folgt $\operatorname{discr} Q_1 = \operatorname{discr} Q_2$.
   (b) Wenn $K = \mathbb{R}$, sind Q_1 und Q_2 äquivalent.
   (c) Wenn $K = \mathbb{Q}$, sind Q_1 und Q_2 nicht äquivalent.

   (3 Punkte)

2. Sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und $V = M(2,2;K)$, der Vektorraum der (2×2)-Matrizen über K. Sei $\beta : V \to K$ gegeben durch $\beta(A) := \operatorname{Spur}(A^2)$.
   (a) Zeigen Sie, dass β eine quadratische Form auf V ist.
   (b) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich β und eine Diagonalisierung von β.

   (3 Punkte)

3. Sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und $Q : V \to K$ eine isotrope quadratische Form auf einem K-Vektorraum V.
   (a) Sei Q nichtdegeneriert. Zeigen Sie, dass Q dann jeden Wert in K annimmt, d.h. $Q(V) = K$.
   (b) Sei Q degeneriert. Gilt dann immer noch $Q(V) = K$? Beweis oder Gegenbeispiel.

   (3 Punkte)

4. Sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und β eine Bilinearform (nicht unbedingt symmetrisch) auf einem K-Vektorraum V.
   (a) Zeigen Sie, dass $Q(v) = \beta(v,v)$ eine quadratische Form auf V ist.
   (b) Bestimmen Sie β_Q in Abhängigkeit von β.
   (c) Zeigen oder widerlegen Sie: wenn β nichtdegeneriert ist, dann ist auch Q nichtdegeneriert.

   (3 Punkte)