Lineare Algebra II – 6. Übungsblatt – Musterlösung

1. Wir bringen $[\beta]_E$ durch simultane Zeilen- und Spaltenumformungen auf Diagonalgestalt, und wenden die Spaltenumformungen jeweils auch auf die Einheitsmatrix an. (Anmerkung: Die Bezeichnung "simultan" ist hier nicht ganz korrekt. Tatsächlich wird jeweils die Spalten- vor der Zeilenumformung oder umgekehrt durchgeführt. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.)

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&-3&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Die Umformungen waren: Addition des (-2)-fachen der ersten Zeile/Spalte zur zweiten Zeile/Spalte, und Addition des (-1)-fachen der ersten Zeile/Spalte zur dritten Zeile/Spalte.

Die gesuchte Orthogonalbasis ist also $\{v_1, v_2, v_3\}$, mit

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Zusatz: diese erfüllen $\beta(v_1, v_1) = 1$, $\beta(v_2, v_2) = -3$, $\beta(v_3, v_3) = -1$.

2. Es kann keine Orthogonalbasis geben: für $v = (x, y) \in K^2$ gilt $\beta(v, v) = xy + yx = 2xy = 0$, also ist β alternierend. Wir haben bereits in der Vorlesung gesehen, dass es für eine alternierende Bilinearform $\beta \neq 0$ keine Orthogonalbasis geben kann.

   Denn sei $\{v_1, v_2\}$ eine Orghogonalbasis, dann gilt $\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) = \beta(v_1, v_1) = \beta(v_2, v_2) = 0$, also für $v = av_1 + bv_2$, $w = cv_1 + dv_2 \in V$:

$$\beta(v, w) = ac\beta(v_1, v_1) + ad\beta(v_1, v_2) + bc\beta(v_2, v_1) + bd\beta(v_2, v_2) = 0.$$

   Es gilt aber $\beta \neq 0$, da z.B. $\beta((1, 0), (0, 1)) = 1$.

3. (a) Seien $u, v, w \in V$. Setze $x = \beta(w, u)v - \beta(v, u)w$, dann folgt

$$\beta(x, u) = \beta(w, u)\beta(v, u) - \beta(v, u)\beta(w, u) = 0.$$

   Aufgrund der angenommenen Symmetrie der Orthogonalität folgt $\beta(u, x) = 0$. Daher

$$0 = \beta(u, x) = \beta(w, u)\beta(u, v) - \beta(v, u)\beta(u, w).$$

(b) Angenommen, β erfüllt (1) und ist nicht symmetrisch. Wir zeigen, dass β dann alternierend ist.

Seien also $u, v \in K$ mit $\beta(u,v) \neq \beta(v,u)$. Wir setzen in (1) $w = u$ und erhalten

$$\beta(u,u)\beta(u,v) = \beta(v,u)\beta(u,u),$$

also $\beta(u,u) = 0$. Da die Bedingung $\beta(u,v) \neq \beta(v,u)$ symmetrisch in u, v war, erhalten wir auch $\beta(v,v) = 0$. (Oder: setze in (1) $w = v$ um $\beta(v,v) = 0$ zu erhalten.)

Wir müssen also nur noch zeigen, dass aus

$$\beta(u,u) = \beta(v,v) = 0$$

bereits $\beta(w,w) = 0$ für alle $w \in V$ folgt. Sei $w \in V$. Falls $\beta(w,u) \neq \beta(u,w)$ oder $\beta(w,v) \neq \beta(v,w)$, dann folgt nach dem obigen Argument $\beta(w,w) = 0$. Nehmen wir also an, dass $\beta(w,u) = \beta(u,w)$ und $\beta(w,v) = \beta(v,w)$. Dann folgt aus (1), dass

$$\beta(w,u)(\beta(u,v) - \beta(v,u)) = 0.$$

Da $\beta(u,v) \neq \beta(v,u)$, folgt $\beta(w,u) = 0$, also auch $\beta(u,w) = 0$. Wenn wir nun die Rollen von u und v in (1) vertauschen, folgt

$$\beta(w,v)(\beta(v,u) - \beta(u,v)) = 0,$$

also $\beta(w,v) = \beta(v,w) = 0$. Wir haben gezeigt, dass

$$\beta(w,u) = \beta(u,w) = \beta(w,v) = \beta(v,w) = 0.$$

Daher folgt auch

$$\begin{aligned} \beta(u, v+w) &= \beta(u,v) + \beta(u,w) = \beta(u,v) \\ \beta(v+w, u) &= \beta(v,u) + \beta(w,u) = \beta(v,u). \end{aligned}$$

Da diese beiden Ausdrücke ungleich sind, folgt, wie zu Beginn des Beweises, $\beta(v+w, v+w) = 0$. Daher

$$0 = \beta(v+w, v+w) = \beta(v,v) + \beta(v,w) + \beta(w,v) + \beta(w,w) = \beta(w,w).$$

4. (a) Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass $\beta|_W$ genau dann nichtdegeneriert ist, wenn $V = W \oplus W^\perp$. Sei also B' eine Orthogonalbasis von W.

Da $\operatorname{char} K \neq 2$ und da $\beta|_{W^\perp}$ symmetrisch ist, gibt es eine Orthogonalbasis B'' von $W^\perp$. Dann ist $B := B' \cup B''$ eine Orthogonalbasis von V. Tatsächlich gilt für $u \neq v \in B'$ und $w \neq x \in B''$:

- $\beta(u,v) = 0$, da B' eine Orthogonalbasis von W ist,
- $\beta(w,x) = 0$, da B'' eine Orthogonalbasis von $W^\perp$ ist,

- $\beta(v, w) = 0$, da $v \in W$, $w \in W^\perp$.

(b) Die Aussage ist dann falsch. Gegenbeispiel: sei $\beta = \beta_{1,1}$ auf $V = \mathbb{R}^2$, d.h.

$$\beta(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2.$$

Sei $W = \mathrm{Spann}_{\mathbb{R}}((1,1))$, dann folgt $\beta|_W = 0$. Es gilt

$$(x_1, x_2) \in W^\perp \Leftrightarrow 0 = \beta((1,1),(x_1,x_2)) = x_1 - x_2,$$

also $W^\perp = W$. Für $x \in V \setminus W$ gilt also

$$\beta(w, (1,1)) \neq 0,$$

daher kann die Orthogonalbasis $(1,1)$ von W nicht zu einer Orthogonalbasis von V ergänzt werden.

(c) i.$\Rightarrow$ii. Sei $B = \{v, v_2, \ldots, v_n\}$ eine Orthogonalbasis. Dann gilt $\beta(v, v_i) = 0$ für $2 \leq i \leq n$. Wenn auch $\beta(v, v) = 0$, dann folgt für $w = a_1 v + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \in V$, dass

$$\beta(v, w) = a_1 \beta(v, v) + a_2 \beta(v, v_2) + \cdots + a_n \beta(v, v_n) = 0,$$

also $v \in V^\perp$.

ii.$\Rightarrow$i. Setze $W := \mathrm{Spann}_K(v)$. Falls $\beta(v, v) \neq 0$, ist $\beta|_W$ nichtdegeneriert, also kann die Orthogonalbasis $\{v\}$ von W nach (a) zu einer Orthogonalbasis von V ergänzt werden.

Falls $v \in V^\perp$, sei $\tilde{W}$ ein beliegibes Komplement zu W, d.h. $V = W \oplus \tilde{W}$. Dann ist auch $\beta|_{\tilde{W}}$ symmetrisch, also hat $\tilde{W}$ eine Orthogonalbasis B'. Da $\beta(v, w) = 0$ für alle $w \in B'$, ist $B = \{v\} \cup B'$ eine Orthogonalbasis von V.