Lineare Algebra II – 6. Übungsblatt

(Abgabe bis 31.5.2016)

---

1. Auf $V = \mathbb{Q}^3$ sei die Bilinearform β gegeben, die bezüglich der Standardbasis E durch die Matrix
$$[\beta]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
dargestellt wird. Finden Sie eine Orthogonalbasis von V.

   (3 Punkte)

2. Sei K ein Körper der Charakteristik 2. Auf $V = K^2$ ist die symmetrische Bilinearform $\beta(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ definiert. Finden Sie eine Orthogonalbasis von V oder zeigen Sie, dass keine solche existiert.

   (3 Punkte)

3. Wir zeigen, dass Orthogonalität für eine Bilinearform β genau dann symmetrisch ist, wenn β symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist.

   Sei β eine Bilinearform auf einem K-Vektorraum V. Zeigen Sie:

   (a) Wenn für alle $v, w \in V$
   $$\beta(v, w) = 0 \Longleftrightarrow \beta(w, v) = 0,$$
   dann gilt für alle $u, v, w \in V$
   $$\beta(w, u)\beta(u, v) = \beta(v, u)\beta(u, w). \tag{1}$$

   (b) Wenn (1) für alle $u, v, w \in V$ gilt, dann ist β symmetrisch oder alternierend.

   (3 Punkte)

4. Sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform β.

   (a) Zeigen Sie: sei $W \subset V$ ein Unterraum und $\beta|_W$ nichtdegeneriert. Dann kann jede Orthogonalbasis von W zu einer Orthogonalbasis von V ergänzt werden.

   (b) Gilt die Aussage in (a) auch, wenn $\beta|_W$ degeneriert ist? Finden Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

   (c) Sei $v \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

      i. Es gibt eine Orthogonalbasis B von V mit $v \in B$.

      ii. $\beta(v, v) \neq 0$ oder $v \in V^\perp$.

   (3 Punkte)