Lineare Algebra II – 1. Übungsblatt – Musterlösung

1. (a) Wir zeigen, dass die Spalten a_1, a_2, a_3 von A eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\|a_1\|^2 &= \frac{1}{625}(81 + 400 + 144) = 1 \\
\|a_2\|^2 &= \frac{1}{625}(400 + 225) = 1 \\
\|a_2\|^2 &= \frac{1}{625}(144 + 225 + 256) = 1 \\
\langle a_1, a_2 \rangle &= \frac{1}{625}(180 - 180) = 0 \\
\langle a_1, a_3 \rangle &= \frac{1}{625}(108 - 300 + 192) = 0 \\
\langle a_2, a_3 \rangle &= \frac{1}{625}(240 - 240) = 0.
\end{aligned}$$

Daher ist $\{a_1, a_2, a_3\}$ eine Orthonormalbasis und $A \in \mathrm{O}(3)$. Weiters gilt

$$\det A = \frac{1}{25^3}\left(-20\begin{vmatrix} -20 & 15 \\ 12 & 16 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ -20 & 15 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{25^3}(10000 + 5625) = 1.$$

Daher folgt $A \in \mathrm{SO}(3)$.

(b) Die Achse ist $\mathrm{Spann}_{\mathbb{R}}(v)$, wobei v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A ist. Elementare Zeilenumformungen liefern

$$A - I = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -16 & 20 & 12 \\ -20 & -25 & 15 \\ 12 & -15 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -16 & 20 & 12 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $v = (3, 0, 4)^t$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.
Wir wissen also, dass es eine Orthonormalbasis $B = \{\frac{1}{\|v\|}v, w_2, w_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ gibt, sodass

$$[L_A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha, \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in [0, 2\pi)$. Die Matrizen A und $[L_A]_B$ sind ähnlich, also haben sie dieselbe Spur. Es gilt also

$$1 + 2\cos\alpha = \mathrm{Spur}[L_A]_B = \mathrm{Spur}\, A = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1,$$

und daher $\cos\alpha = 0$.

2. Es gilt $Q(x,y,z) = (x,y,z)A_Q(x,y,z)^t$, für

$$A_Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laut Hauptachsentransformation sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A_Q. Wir berechnen diese als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} \chi_{A_Q} &= \begin{vmatrix} 3-X & -2 & 0 \\ -2 & 2-X & -2 \\ 0 & -2 & 1-X \end{vmatrix} = (3-X)\begin{vmatrix} 2-X & -2 \\ -2 & 1-X \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (3-X)(2-X)(1-X) - 4(3-X) + 2(-2)(1-X) \\ &= -X^3 + 6X^2 - 3X - 10 = -(X-2)(X-5)(X+1). \end{aligned}$$

Wir erhalten also $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -1$.

Die gesuchte Drehung L ist gegeben durch $U \in \mathrm{SO}(3)$ mit $U^t A_Q U = \mathrm{diag}(2, 5, -1)$. Die Spalten u_1, u_2, u_3 von U sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren zu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A_Q. Elementare Zeilenumformungen liefern

$$\begin{aligned} A - 2I &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{also } u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ A - 5I &= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also } u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A + I &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{also } u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir wählen also

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(3).$$

Da

$$\det U = \frac{1}{3^3}\left(-2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{3^3}(12 + 3 + 12) = 1,$$

gilt $U \in \mathrm{SO}(3)$. (Im Fall $\det U = -1$ hätten wir u_1 durch $-u_1$ ersetzen können, um $\det U = 1$ zu erreichen.)

Die gesuchte Drehung L ist gegeben durch $x \mapsto Ux$.

3. (a) Sei $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ eine beliebige QR-Zerlegng von A, d.h. $\tilde{Q} \in \mathrm{O}(n)$ bzw. $\tilde{Q} \in \mathrm{U}(n)$ und $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M(n,n;\mathbb{K})$ ist eine rechte obere Dreiecksmatrix.

Seien $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A und $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n$ die Spalten von $\tilde{Q}$. Dann gilt

$$a_j = \sum_{i=1}^{j} \tilde{r}_{ij}\tilde{w}_i, \qquad \text{für } 1 \le j \le n. \tag{1}$$

Da $a_j \notin \mathrm{Spann}_{\mathbb{K}}(a_1, \dots, a_{j-1}) = \mathrm{Spann}_{\mathbb{K}}(w_1, \dots, w_{j-1})$, folgt $\tilde{r}_{jj} \neq 0$ für $1 \le j \le n$. (Achtung: hier wurde Induktion verwendet.) Wir modifizieren $\tilde{R}, \tilde{Q}$ wie folgt:

$$\text{Für } 1 \le i \le n : \begin{cases} \text{für } i \le j \le n, \text{ setze } r_{ij} := \frac{|\tilde{r}_{ii}|}{\tilde{r}_{ii}}\tilde{r}_{ij}, \\ \text{setze } w_i := \frac{\tilde{r}_{ii}}{|\tilde{r}_{ii}|}\tilde{w}_i. \end{cases}$$

Dann ist auch $w_1, \dots, w_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$, da $|\tilde{r}_{ii}/|\tilde{r}_{ii}|| = 1$. Weiters gilt $r_{ii} = 1$ für $1 \le i \le n$, und

$$a_j = \sum_{i=1}^{j} \tilde{r}_{ij}\frac{|\tilde{r}_{ii}|}{\tilde{r}_{ii}} \cdot \frac{\tilde{r}_{ii}}{|\tilde{r}_{ii}|}\tilde{w}_i = \sum_{i=1}^{j} r_{ij}w_i.$$

Wir wählen also Q als die Matrix mit Spalten $w_1, \dots, w_n$ und $R = (r_{ij})_{1\le i,j\le n}$.

(b) Sei $A = QR = \tilde{Q}\tilde{R}$, wobei $Q, \tilde{Q} \in \mathrm{O}(n)$ (bzw. $Q, \tilde{Q} \in \mathrm{U}(n)$) und $R = (r_{ij}), \tilde{R} = (\tilde{r}_{ij}) \in M(n,n;\mathbb{K})$ obere Dreiecksmatrizen mit $r_{ii} > 0$ und $\tilde{r}_{ii} > 0$ für alle $1 \le i \le n$.

Seien $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A, $w_1, \dots, w_n$ die Spalten von Q, und $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n$ die Spalten von $\tilde{Q}$. Wir behaupten:

$$\text{für alle } 1 \le j \le n \text{ gilt } \begin{cases} w_j = \tilde{w}_j \\ r_{ij} = \tilde{r}_{ij} \text{ für } 1 \le i \le j. \end{cases}$$

Wir führen den Beweis per Induktion und rufen uns dazu noch einmal (1) in Erinnerung. Im Fall $j = 1$ gilt

$$r_{11} = r_{11}\|w_1\| = \|r_{11}w_1\| = \|a_1\| = \|\tilde{r}_{11}\tilde{w}_1\| = \tilde{r}_{11}\|\tilde{w}_1\| = \tilde{r}_{11},$$

und

$$w_1 = \frac{1}{r_{11}} \cdot a_1 = \frac{1}{\tilde{r}_{11}} \cdot a_1 = \tilde{w}_1.$$

Für den Induktionsschritt, gilt

$$a_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij}w_i = \sum_{i=1}^{j} \tilde{r}_{ij}\tilde{w}_i,$$

und wir können bereits annehmen, dass $w_i = \tilde{w}_i$ für $1 \le i \le j-1$. Es folgt

$$r_{ij} = r_{ij}\langle w_i, w_i\rangle = \langle a_j, w_i\rangle = \langle a_j, \tilde{w}_i\rangle = \tilde{r}_{ij}\langle \tilde{w}_i, \tilde{w}_i\rangle = \tilde{r}_{ij},$$

für $1 \le i \le j-1$. Weiters folgt

$$r_{jj} w_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} w_i = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{r}_{ij} \tilde{w}_i = \tilde{r}_{jj} \tilde{w}_j,$$

also $|r_{jj}| = \|r_{jj} w_j\| = \|\tilde{r}_{jj} \tilde{w}_j\| = |\tilde{r}_{jj}|$. Da beide Werte nach Voraussetzung positiv sind, folgt $r_{jj} = \tilde{r}_{jj}$, also auch $w_j = \tilde{w}_j$.

4. (a) Es gilt $m \le n$. Die Matrix $A^* \in M(n,m;\mathbb{K})$ hat auch Rang m, also gibt es $Q \in \mathrm{O}(n)$ (bzw. $Q \in \mathrm{U}(n)$) und eine rechte obere Dreiecksmatrix $R \in M(n,m;\mathbb{K})$, sodass $A^* = QR$. Schreibe

$$R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \tilde{R} \in M(m,m;\mathbb{K}) \text{ und } 0 \in M(n-m,m;\mathbb{K}) \text{ die Nullmatrix.}$$

Dann gibt es eine eindeutige Lösung $z_0 \in \mathbb{K}^m$ des linearen Gleichungssystems $\tilde{R}^* z = b$.

Setze

$$x_0 := Q \cdot \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

dann gilt $Ax_0 = b$ und $\|x_0\| = \min\{\|x\| \mid x \in \mathbb{K}^n,\ Ax = b\}$.

(b) Es gilt $\operatorname{Rang} \tilde{R}^* = \operatorname{Rang} \tilde{R} = \operatorname{Rang} R = \operatorname{Rang} QR = \operatorname{Rang} A^* = \operatorname{Rang} A = m$, also gibt es ein eindeutiges $z_0 \in \mathbb{K}^m$ mit $\tilde{R}^* z_0 = b$.

Für x_0 wie in (a) folgt dann

$$\begin{aligned} Ax_0 &= (A^*)^* x_0 = (QR)^* x_0 = R^* Q^* x_0 = R^* Q^* Q \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= R^* \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{R}^* z_0 = b. \end{aligned}$$

Sei jetzt $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = b$, dann folgt $R^* Q^* x = b$. Sei $y := Q^* x$, dann $\|x\| = \|y\|$ und $R^* y = b$. Schreibe

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } y_0 \in \mathbb{K}^m,\ y_1 \in \mathbb{K}^{n-m}.$$

Dann gilt

$$b = R^* y = \begin{pmatrix} \tilde{R}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \tilde{R}^* y_0,$$

also $y_0 = z_0$. Daher

$$\|x\| = \|y\| = \left\|\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right\| \ge \left\|\begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|Q \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \|x_0\|.$$