Lineare Algebra II – 4. Übungsblatt

(Wegen **Pfingsten**: Abgabe bis 18.5.2016, 10:00 Uhr)

---

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 20 & 12 \\ -20 & 0 & 15 \\ 12 & -15 & 16 \end{pmatrix}$$
   (a) Zeigen Sie, dass $A \in \mathrm{SO}(3)$.

   (b) Bestimmen Sie die Achse der Drehung und den Cosinus des Drehwinkels.

   (3 Punkte)

2. Für die quadratische Form
$$Q(x, y, z) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 4yz + z^2,$$
   bestimmen Sie $L \in \mathrm{SU}(\mathbb{R}^3)$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass
$$(Q \circ L)(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2.$$
   (3 Punkte)

3. Sei $A \in M(n, n; \mathbb{K})$ invertierbar.

   (a) Zeigen Sie, dass es eine orthogonale bzw. unitäre Matrix $Q \in M(n, n; \mathbb{K})$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $R = (r_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M(n, n; \mathbb{K})$ gibt, sodass
$$A = QR \quad \text{und} \quad r_{ii} > 0 \text{ für alle } 1 \le i \le n.$$
   (b) Zeigen Sie, dass Q und R in (a) eindeutig bestimmt sind.

   (3 Punkte)

4. Sei $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ mit $\operatorname{Rang} A = m$, und $b \in \mathbb{K}^m$. Dann bilden die Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ einen affinen Unterraum von $\mathbb{K}^n$. Wir bestimmen eine minimale Lösung mittels QR-Zerlegung.

   (a) Unter Verwendung einer QR-Zerlegung von A^*, geben Sie ein Verfahren zur Bestimmung eines Vektors $x_0 \in \mathbb{K}^n$ an, sodass
$$Ax_0 = b \quad \text{und} \quad \|x_0\| = \min\{\|x\| \mid x \in \mathbb{K}^n \text{ und } Ax = b\}.$$
   (b) Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens aus (a).

   (3 Punkte)