Lineare Algebra II – 3. Übungsblatt

(Abgabe bis 10.5.2016)

---

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Finden Sie eine orthogonale Matrix $U \in \mathrm{O}(3)$, sodass $U^t AU$ eine Diagonalmatrix ist.

   (3 Punkte)

2. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum und $L : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (a) Für jeden Eigenwert λ von L gilt $\lambda > 0$.

   (b) Für alle $x \in V \setminus \{0\}$ gilt $\langle L(x), x \rangle > 0$.

   (3 Punkte)

3. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum. Zeigen Sie:

   (a) Sei $L : V \to V$ ein nilpotenter selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gilt $L = 0$.

   (b) Seien $L_1, L_2 : V \to V$ selbstadjungierte Endomorphismen. Dann ist $L_1 \circ L_2$ genau dann selbstadjungiert, wenn $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$.

   (3 Punkte)

4. Zeigen Sie:

   (a) Sei V ein euklidischer Raum. Dann gilt für $v, w \in V$
   $$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right).$$

   (b) Sei V ein unitärer Raum. Dann gilt für $v, w \in V$
   $$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \left(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2 \right).$$

   (c) Seien V, W ein euklidische oder unitäre Räume. Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ ist genau dann unitär, wenn $\|L(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$.

   (3 Punkte)