Lineare Algebra II – 2. Übungsblatt

(Abgabe bis 3.5.2016)

---

1. Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $L : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass es eine Orthonormalbasis B von V gibt, sodass die darstellende Matrix $[L]_B$ von L bezüglich B eine obere Dreiecksmatrix ist.

   Hinweis: Induktion. Es könnte ratsam sein, sich an den Beweis von Satz 7.3.4 aus der Linearen Algebra I zu erinnern.

   (3 Punkte)

2. Sei $V \subset \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 3.

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$
   ein inneres Produkt auf V definiert.

   (b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

   (c) Sei $L : V \to V$ die Ableitung $L(p) = p'$. Bestimmen Sie die adjungierte Abbildung L^*.

   (3 Punkte)

3. Seien V, W endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Räume. In der Linearen Algebra I wurde zu jeder linearen Abbildung $L : V \to W$ die *duale* Abbildung $L^t : W^* \to V^*$, $L^t(\phi) = \phi \circ L$ definiert. (Sie wurde dort als L^* bezeichnet, doch L^* ist für uns die adjungierte Abbildung $L^* : W \to V$.)

   Zeigen Sie folgenden Zusammenhang zwischen L^t und L^*: Seien $\Phi_V : V \to V^*$, $\Phi_W : W \to W^*$ die kanonischen durch die inneren Produkte gegebenen Semiisomorphismen. Dann gilt
   $$L^* = \Phi_V^{-1} \circ L^t \circ \Phi_W.$$

   (3 Punkte)

4. Zeigen Sie:

   (a) Seien V, W endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Räume und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt
   $$\mathrm{Im}(L^*) = (\mathrm{Ker}\, L)^\perp \quad \text{und} \quad \mathrm{Ker}(L^*) = (\mathrm{Im}\, L)^\perp.$$

   (b) Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $L : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann ist L genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle L(v), v\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$ gilt.

   (3 Punkte)