Lineare Algebra II – 1. Übungsblatt – Musterlösung

1. (a) Wir zwigen, dass V mit dieser Skalarmultiplikation die Axiome eines $\mathbb{C}$-Vektorraums erfüllt. Da V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, ist $(V,+)$ insbesondere eine abelsche Gruppe. Seien $\alpha = a+bi, \beta = c+di \in \mathbb{C}$, $v, w \in V$. Wir müssen zeigen, dass

   i. $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

   ii. $(\alpha\beta)\cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$

   iii. $\alpha \cdot (v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

   iv. $1 \cdot v = v$

   Für i. berechnen wir

$$\begin{aligned}((a+bi)+(c+di))\cdot v &= ((a+c)+(b+d)i)\cdot v = (a+c)v+(b+d)J(v)\\ &= (av+bJ(v))+(cv+dJ(v)) = (a+bi)\cdot v+(c+di)\cdot v.\end{aligned}$$

   Für ii. berechnen wir

$$((a+bi)(c+di))\cdot v = (ac-bd+(ad+bc)i)\cdot v = (ac-bd)v+(ad+bc)J(v),$$

   und, da J ein Endomorphismus mit $J^2 = -\operatorname{id}$ ist,

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot((c+di)\cdot v) &= (a+bi)\cdot(cv+dJ(v)) = acv+adJ(v)+bJ(cv)+bJ(dJ(v))\\ &= acv+adJ(v)+bcJ(v)+bdJ(J(v))\\ &= (ac-bd)v+(ad+bc)J(v).\end{aligned}$$

   Also stimmen beide Seiten von ii. überein.
   Für iii. berechnen wir

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(v+w) &= a(v+w)+bJ(v+w) = av+aw+bJ(v)+bJ(w)\\ &= av+bJ(v)+aw+bJ(w) = (a+bi)\cdot v+(a+bi)\cdot w.\end{aligned}$$

   Für iv. bemerken wir, dass $1\cdot v = 1v+0J(v) = v$.

   (b) Sei V eindlichdimensional und $v_1,\dots,v_r$ ein Erzeugendensystem von V. Dann ist jedes $v \in V$ eine Linearkombination

$$v = a_1v_1+\cdots+a_rv_r \tag{1}$$

   mit $a_i \in \mathbb{R}$. Da die Inklusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mit den Skalarmultiplikationen komptivel ist (d.h. $av = (a+0i)\cdot v$), ist (1) auch eine Linearkombination über $\mathbb{C}$, und daher $v_1,\dots,v_r$ auch ein Erzeugendensystem von V als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Daher ist V auch als $\mathbb{C}$-Vektorraum endlich-dimensional.

   Sei $\{w_1,\dots,w_n\}$ eine Basis von V als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wir werden zeigen, dass dann $\{w_1,\dots,w_n,J(w_1),\dots,J(w_n)\}$ eine Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, also $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$.

Sei $v \in V$. Dann gibt es $\alpha_j = a_j + b_j i \in \mathbb{C}$, sodass

$$v = \alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_n \cdot w_n = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n + b_1 J(w_1) + \cdots + b_n J(w_n).$$

Daher ist $\{w_1, \ldots, w_n, J(w_1), \ldots, J(w_n)\}$ ein Erzeugendensystem von V über $\mathbb{R}$. Angenommen, es gibt eine Linearkombination

$$0 = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n + b_1 J(w_1) + \cdots + b_n J(w_n),$$

mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$0 = (a_1 + b_1 i) \cdot w_1 + \cdots + (a_n + b_n i) \cdot w_n,$$

und da $\{w_1, \ldots, w_n\}$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ ist, folgt $a_j + b_j i = 0$, also $a_j = 0$ und $b_j = 0$ für $1 \leq j \leq n$. Daher ist $\{w_1, \ldots, w_n, J(w_1), \ldots, J(w_n)\}$ linear unabhängig.

2. (a) Unter Verwendung der Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ berechnen wir

$$\begin{aligned} &\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle + \langle v - w, v - w \rangle \\ =&\langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ =&2\|v\| + 2\|w\|. \end{aligned}$$

(b) Wir zeigen zuerst, dass $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf V ist, d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $v, w \in V$ gilt

i. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

iii. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Für i. gilt $\max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\} \geq 0$, da $|v_i| \geq 0$ für $1 \leq i \leq n$ gilt. Weiters gilt $\max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\} = 0$ genau dann, wenn $|v_1| = \cdots = |v_n| = 0$, also $v = 0$.
Für ii. berechnen wir

$$\begin{aligned} \|\alpha v\| &= \max\{|\alpha v_1|, \ldots, |\alpha v_n|\} = \max\{|\alpha||v_1|, \ldots, |\alpha||v_n|\} \\ &= |\alpha| \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\} = |\alpha| \|v\|. \end{aligned}$$

Für iii. berechnen wir, unter Verwendung der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag,

$$\begin{aligned} \|v + w\| &= \max\{|v_1 + w_1|, \ldots, |v_n + w_n|\} \leq \max\{|v_1| + |w_1|, \ldots, |v_n| + |w_n|\} \\ &\leq \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\} + \max\{|w_1|, \ldots, |w_n|\} = \|v\| + \|w\|. \end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|$ eine Vektornorm. Sei $v = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ und $w = (0, 1, 0, \ldots, 0)$. Dann gilt

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = \max\{1, 1, 0, \ldots, 0\}^2 + \max\{1, 1, 0, \ldots, 0\}^2 = 2,$$

aber

$$2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = 2\max\{1,0,\dots,0\}^2 + 2\max\{0,1,0,\dots,0\}^2 = 4.$$

Also erfüllt $\|\cdot\|$ die Parallelogrammgleichung nicht und kann daher, laut (a), nicht durch ein inneres Produkt induziert sein.

3. (a) Es gilt, auch ohne die Parallelogrammgleichung zu verwenden,

$$\langle v,v\rangle = \frac{1}{2}(\|2v\|^2 - \|v\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{2}(4\|v\|^2 - \|v\|^2 - \|v\|^2) = \|v\|^2.$$

(b) Unter mehrmaliger Verwendung der Parallelogrammgleichung zeigen wir

$$\begin{aligned}
2\langle v_1+v_2,w\rangle &= \|v_1+v_2+w\|^2 - \|v_1+v_2\|^2 - \|w\|^2\\
&= \|v_1+v_2+w\|^2 - \frac{1}{2}\|v_1+v_2+w\|^2 - \frac{1}{2}\|v_1+v_2-w\|^2\\
&= \frac{1}{2}(\|v_1+v_2+w\|^2 - \|v_1+v_2-w\|^2)\\
&= \frac{1}{2}(\|v_1+v_2+w\|^2 + \|v_1-v_2+w\|^2 - \|v_1-v_2+w\|^2 - \|v_1+v_2-w\|^2\\
&= \|v_1+w\|^2 + \|v_2\|^2 - \|v_1\|^2 - \|v_2-w\|^2\\
&= \|v_1+w\|^2 + \|v_2\|^2 - \|v_1\|^2 - 2\|v_2\|^2 - 2\|w\|^2 + \|v_2+w\|^2\\
&= \|v_1+w\|^2 - \|v_1\|^2 - \|w\|^2 + \|v_2+w\|^2 - \|v_2\|^2 - \|w\|^2\\
&= 2(\langle v_1,w\rangle + \langle v_2,w\rangle).
\end{aligned}$$

(c) Für $n=0$ haben wir

$$\langle 0,w\rangle = \frac{1}{2}(\|w\| - \|0\| - \|w\|) = 0.$$

Für $n=1$ gilt $\langle 1v,w\rangle = \langle v,w\rangle = 1\langle v,w\rangle$. Gelte die Aussage für $n-1$. Dann folgt aus (b) und der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\langle nv,w\rangle = \langle (n-1)v+v,w\rangle = \langle (n-1)v,w\rangle + \langle v,w\rangle = (n-1)\langle v,w\rangle + \langle v,w\rangle = n\langle v,w\rangle.$$

(d) Sei zuerst $m\in\mathbb{N}$. Dann gilt, wegen (b) und (c), dass

$$\langle -mv,w\rangle + \langle mv,w\rangle = \langle 0,w\rangle = 0,$$

also $\langle -mv,w\rangle = -\langle mv,w\rangle = -m\langle v,w\rangle$. Die Aussage gilt also für alle $m\in\mathbb{Z}$. Sei jetzt $a=m/n\in\mathbb{Q}$, mit $m,n\in\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$n\langle av,w\rangle = n\langle m\frac{1}{n}v,w\rangle = nm\langle \frac{1}{n}v,w\rangle = m\langle n\frac{1}{n}v,w\rangle = m\langle v,w\rangle,$$

also $\langle av,w\rangle = (m/n)\langle v,w\rangle = a\langle v,w\rangle$.

(e) Wir werden die *umgekehrte Dreiecksungleichung* für $\|\cdot\|$ benötigen, die lautet

$$\|v + w\| \geq |\|v\| - \|w\||. \tag{2}$$

Diese folgt unmittelbar aus der gewöhnlichen Dreiecksungleichung, da

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|v + w - w\| \leq \|v + w\| + \|-w\| = \|v + w\| + \|w\| \\ \|w\| &= \|w + v - v\| \leq \|w + v\| + \|-v\| = \|v + w\| + \|v\|. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Tatsachem dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, d.h. für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \beta_\varepsilon \in \mathbb{R} : \ \alpha - \beta_\varepsilon \in \mathbb{Q} \text{ und } |\beta_\varepsilon| < \varepsilon.$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt also, wegen (b),(d),

$$\begin{aligned} |\langle \alpha v, w\rangle - \alpha\langle v, w\rangle| &= |\langle(\alpha - \beta_\varepsilon + \beta_\varepsilon)v, w\rangle - (\alpha - \beta_\varepsilon + \beta_\varepsilon)\langle v, w\rangle| \\ &= |\langle(\alpha - \beta_\varepsilon)v, w\rangle + \langle \beta_\varepsilon v, w\rangle - (\alpha - \beta_\varepsilon)\langle v, w\rangle - \beta_\varepsilon\langle v, w\rangle| \\ &= |\langle \beta_\varepsilon v, w\rangle - \beta_\varepsilon\langle v, w\rangle| \\ &\leq |\langle \beta_\varepsilon v, w\rangle| + |\beta_\epsilon||\langle v, w\rangle|. \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung und (2) zeigen, dass

$$|\|w\| - |\beta_\epsilon|\|v\|| \leq \|\beta_\epsilon v + w\| \leq |\beta_\epsilon|\|v\| + \|w\|,$$

und daher

$$|\|\beta_\epsilon v + w\|^2 - \|w\|^2| \leq |\beta_\epsilon|^2\|v\|^2 \pm 2|\beta_\epsilon|\|v\|\|w\| \leq |\beta_\epsilon|(|\beta_\epsilon|\|v\|^2 + 2\|v\|\|w\|).$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} |\langle \beta_\epsilon v, w\rangle| = \frac{1}{2}|(\|\beta_\epsilon v + w\|^2 - \|\beta_\epsilon v\|^2 - \|w\|^2)| &\leq \frac{1}{2}(|\|\beta_\epsilon v + w\|^2 - \|w\|^2| + |\beta_\epsilon|^2\|v\|^2) \\ &\leq |\beta_\epsilon|(\beta_\epsilon\|v\|^2 + \|v\|\|w\|). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also für jedes $\epsilon > 0$, dass

$$|\langle \alpha v, w\rangle - \alpha\langle v, w\rangle| \leq |\beta_\epsilon|(|\beta_\epsilon|\|v\|^2 + \|v\|\|w\| + |\langle v, w\rangle|) \leq \epsilon(\epsilon\|v\|^2 + \|v\|\|w\| + |\langle v, w\rangle|).$$

Wir können den Ausdruck auf der rechten Seite kleiner als jede positive Zahl machen, indem wir ϵ klein genug wählen. Daher gilt $|\langle \alpha v, w\rangle - \alpha\langle v, w\rangle| = 0$, also $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$.

(f) Linearität im ersten Argument folgt aus (b), (e). Positive Definitheit folgt aus (a) und der entsprechenden Eigenschaft von $\|\|$. Weiters gilt

$$\langle w, v\rangle = \frac{1}{2}(\|w - v\| - \|w\| - \|v\|) = \frac{1}{2}(\|v - w\| - \|v\| - \|w\|) = \langle v, w\rangle.$$

4. (a) Wir verwenden folgende Formeln für Sinus und Cosinus, die sich alle einfach über die Darstellungen $\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2$, $\sin(t) = (e^{it} - e^{-it})/(2i)$ zeigen lassen:

$$\begin{aligned}
\cos(mt)\cos(nt) &= \frac{1}{2}(\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)) \\
\sin(mt)\sin(nt) &= \frac{1}{2}(\cos((m-n)t) - \cos((m+n)t)) \\
\cos(mt)\sin(nt) &= \frac{1}{2}(\sin((m+n)t) - \sin((m-n)t)).
\end{aligned}$$

Wir zeigen zuerst, dass alle Elemente von B normiert sind. Es gilt

$$\|\frac{1}{\sqrt{2}}\| = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\mathrm{d}t = 1.$$

Für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\cos(nt)\| &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(2nt)+1)\mathrm{d}t = 1 \\
\|\sin(nt)\| &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2nt))\mathrm{d}t = 1.
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass die Elemente von B paarweise orthogonal zueinander sind. Für $n \neq m$ gilt

$$\langle \cos(mt), \cos(nt)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t))\mathrm{d}t = 0$$

und

$$\langle \sin(mt), \sin(nt)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos((m-n)t) - \cos((m+n)t))\mathrm{d}t = 0$$

Schließlich gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$, dass

$$\langle \cos(mt), \sin(nt)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin((m+n)t) - \sin((m-n)t))\mathrm{d}t = 0.$$

Wir haben gezeigt, dass B eine orthonormale Menge ist. Laut einem Resultat aus der Vorlesung, ist B also linear unabhängig, und daher eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Spann}_{\mathbb{R}}(B)$.

(b) Das folgt unmittelbar aus Lemma 1.1.14 aus der Vorlesung.