Lineare Algebra II – 12. Übungsblatt

(Abgabe bis 12.7.2016)

Für Aufgaben 3. und 4. benötigen Sie Inhalte der Vorlesung am **Mittwoch, 6. Juli**.

1. Sei R ein Integritätsbereich und M ein endlich erzeugter R-Modul. Für $m \in M$, sei der *Annulator* von m definiert als

$$\operatorname{Ann}(m) := \{r \in R \mid rm = 0\}.$$

Weiters sei

$$\operatorname{Ann}(M) := \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für alle } m \in M\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Ann}(m)$ und $\operatorname{Ann}(M)$ sind Ideale von R.

(b) M ist genau dann ein Torsionsmodul, wenn $\operatorname{Ann}(M) \neq \{0\}$.

(c) Sei $M = Rm$ für ein $m \in M$. Dann gibt es einen R-Modul-Isomorphismus $R/\operatorname{Ann}(m) \to M$.

(3 Punkte)

2. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Primzahlen. Wir betrachten die Mengen

$$M := \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} := \{(a_p)_{p\in\mathcal{P}} \mid a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}.$$

$$N := \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} := \{(a_p)_{p\in\mathcal{P}} \mid a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ a_p = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } p\}.$$

Zeigen Sie:

(a) M ist ein $\mathbb{Z}$-Modul und $N = T(M)$

(b) $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} pM = \{0\}$, wobei $pM = \{pm \mid m \in M\}$

(c) $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} p\ M/N \neq \{0\}$, wobei $p\ M/N = \{p(m+N) \mid m + N \in M/N\}$

(d) Es gibt keinen Untermodul U von M, sodass $M = N \oplus U$.

(3 Punkte)

3. Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle abelschen Gruppen mit 48 Elementen.

(3 Punkte)

4. Sei M ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\{a, b, c, d\}$. Sei $U = \langle w, x, y, z \rangle$, wobei

$$\begin{aligned} w &= -a + 3b + 2c + 8d, \\ x &= 3b + 2c + 8d, \\ y &= 5a + b - 4c + 8d, \\ z &= 7a + 4b - 2c + 16d. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Elementarteiler von M/U.

(3 Punkte)