Lineare Algebra II – 11. Übungsblatt

(Abgabe bis 5.7.2016)

---

1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (a) Jedes Ideal I von R ist endlich erzeugt, d.h.

   $$I = r_1 R + \cdots + r_n R$$

   für ein $n \in \mathbb{N}$ und $r_1, \dots, r_n \in R$.

   (b) Jede aufsteigende Kette von Idealen

   $$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$$

   wird stationär. D.h., es gibt $n \in \mathbb{N}$, sodass $I_k = I_n$ für alle $k \geq n$.

   (3 Punkte)

2. Sei M eine abelsche Gruppe und $\mathrm{End}(M)$ die Menge aller Gruppenhomomorphismen $M \to M$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}(M)$ mit punktweiser Addition und Hintereinanderausführung einen Ring mit Eins bildet.

   (b) Sei R ein Ring mit Eins und $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ ein Ringhomomorphismus, sodass $\varphi(1_R) = 1_{\mathrm{End}(M)}$. Zeigen Sie, dass M dann ein R-Modul ist.

   (c) Sei R ein Ring mit Eins und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass es dann einen Ringhomomorhphismus $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ mit $\varphi(1_R) = 1_{\mathrm{End}(M)}$ gibt.

   (3 Punkte)

3. Seien N_1, N_2 Untermoduln eines R-Moduls M, und

   $$N_1 + N_2 := \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1,\ n_2 \in N_2\} \subset M.$$

   Zeigen Sie:

   (a) $N_1 + N_2 = \langle N_1 \cup N_2 \rangle$

   (b) Es gibt einen Isomorphismus von R-Moduln

   $$N_1/(N_1 \cap N_2) \to (N_1 + N_2)/N_2.$$

   (3 Punkte)

4. Eine Abelsche Gruppe G heißt *frei*, wenn G ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$ ist frei.

(b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist frei.

(c) $(\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}, \cdot)$ ist frei.

(3 Punkte)