Lineare Algebra II – 10. Übungsblatt

(Abgabe bis 28.6.2016)

---

1. Beweisen Sie Lemma 3.4.11 aus der Vorlesung:

   Sei R ein faktorieller Ring und $r_1, \dots, r_n \in R \setminus \{0\}$. Dann gibt es einen größten gemeinsamen Teiler von $r_1, \dots, r_n$ in R. Sei $\mathcal{P}$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen von irreduziblen Elementen in R, und

   $$r_i = u_i \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{e_{i,p}}$$

   die Primfaktorzerlegung von r_i, mit einer Einheit u_i, $e_{i,p} \in \mathbb{N}_0$ für alle $p \in \mathcal{P}$, und $e_{i,p} = 0$ für alle bis auf endlich viele $p \in \mathcal{P}$. Dann gilt

   $$\mathrm{ggT}(r_1, \dots, r_n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_{i,p} \mid 1 \le i \le n\}}.$$

   (3 Punkte)

2. Ein *lokaler Ring* ist ein kommutativer Ring mit Eins, der genau ein maximales Ideal besitzt.

   (a) Finden Sie (mit Begründung) ein Beispiel eines lokalen Rings, der kein Körper ist.

   (b) Zeigen Sie: Ein kommutativer Ring R mit Eins ist genau dann lokal, wenn die Menge

   $$\{r \in R \mid r \text{ ist nicht invertierbar } \}$$

   ein Ideal ist.

   (3 Punkte)

3. Über $\mathbb{Z}$ lassen sich die Voraussetzungen des Chinesischen Restsatzes etwas abschwächen:

   (a) Seien $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, sodass $a_i \equiv a_j \bmod \mathrm{ggT}(m_i, m_j)$ für alle $1 \le i, j \le n$ gilt. Zeigen Sie: es gibt $a \in \mathbb{Z}$, sodass $a \equiv a_i \bmod m_i$ für $1 \le i \le n$. Dieses a ist eindeutig modulo $\mathrm{kgV}(m_1, \dots, m_n)$.

   (b) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{Z}$ mit

   $$\begin{aligned} a &\equiv 10 \mod 24 \\ a &\equiv 18 \mod 64. \end{aligned}$$

   (3 Punkte)

4. Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie:

(a) Mit der Addition und Multiplikation von $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{Z}[i]$ ein Ring.

(b) $\mathbb{Z}[i]$ ist ein Integritätsbereich.

(c) $\mathbb{Z}[i]$ ist ein Euklidischer Ring, mit $\phi(a + bi) = a^2 + b^2$.

(3 Punkte)