Lineare Algebra II – 1. Übungsblatt

(Abgabe bis 26.4.2016)

---

1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *komplexe Struktur* auf V ist ein Endomorphismus $J : V \to V$ mit $J^2 = -\operatorname{id}$, wobei id die identische Abbildung $V \to V$ ist.

   Sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer komplexen Struktur J gegeben.

   (a) Zeigen Sie, dass V mit der Skalarmultiplikation
   $$(a + bi) \cdot v := av + bJ(v)$$
   zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum wird.

   (b) Sei V endlich-dimensional. Zeigen Sie, dass dann $\dim_{\mathbb{R}} V$ gerade ist.

   (3 Punkte)

2. Wir werden zeigen, dass nicht jede Vektornorm durch ein inneres Produkt induziert ist.

   (a) Sei V ein euklidischer Raum und $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die induzierte Norm. Zeigen Sie, dass dann die *Parallelogrammgleichung*
   $$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \tag{1}$$
   für alle $v, w \in V$ gilt.

   (b) Sei $V := \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass, für $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$, durch
   $$\|v\| := \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$$
   eine Vektornorm auf V definiert ist, die nicht durch ein inneres Produkt auf V induziert ist.

   (3 Punkte)

3. Sei jetzt V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf V, die für alle $v, w \in V$ die Parallelogramgleichung (1) erfüllt. Wir zeigen, dass ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V existiert, das die Norm induziert. Wir definieren
   $$\langle v, w\rangle := \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2).$$
   Seien $v, v_1, v_2, w \in V$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\langle nv, w\rangle = n\langle v, w\rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (*Hinweis: Induktion*)

(d) Zeigen Sie, dass $\langle av, w\rangle = a\langle v, w\rangle$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. (*Hinweis:* $\mathbb{Q}$ *ist dicht in* $\mathbb{R}$.)

(f) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein inneres Produkt auf V ist.

(3 Punkte)

4. Sei $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, mit dem inneren Produkt
$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$
Sei
$$B := \{1/\sqrt{2}, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots\}$$
und $W := \mathrm{Spann}_{\mathbb{R}}(B)$. Zeigen Sie:

(a) B ist eine Orthonormalbasis von W

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und
$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \in W.$$
Dann gilt $\langle f, \cos(kt)\rangle = a_k$ und $\langle f, \sin(kt)\rangle = b_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

(3 Punkte)