8. Äquivalenzen zur Riemannschen Vermutung

Die Riemannsche Vermutung besagt bekanntlich, dass alle nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion den Realteil $= \frac{1}{2}$ haben. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Wir führen nun folgende Abschwächung der Riemannschen Vermutung ein. Für $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$ verstehen wir unter $\mathrm{RH}(\theta)$ die Aussage

$\mathrm{RH}(\theta)$: $\qquad \zeta(s)$ hat keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}(s) > \theta$.

Es ist also $\mathrm{RH}(\frac{1}{2})$ die klassische Riemannsche Vermutung (RH = *Riemann hypothesis*). Es gilt RH(1), aber für kein $\theta < 1$ ist $\mathrm{RH}(\theta)$ bewiesen.

8.1. Satz. *Sei $\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1$. Dann ist jede der folgenden Aussagen zu $\mathrm{RH}(\theta)$ äquivalent:*

(i) *Approximation von $\pi(x)$ durch den Integral-Logarithmus: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\theta+\varepsilon})$$

(ii) *Für die Tschebyscheffsche Theta-Funktion gilt für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\vartheta(x) = x + O(x^{\theta+\varepsilon}).$$

(iii) *Für die Tschebyscheffsche Psi-Funktion gilt für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\psi(x) = x + O(x^{\theta+\varepsilon}).$$

(iv) *Für die Mertens-Funktion $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(x)$ gilt jedes $\varepsilon > 0$*

$$M(x) = O(x^{\theta+\varepsilon}).$$

(v) *Für $x \geqslant 1$ sei $\nu_{ev}(x)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $n \leqslant x$, die Produkt einer geraden Anzahl von Primfaktoren sind und $\nu_{odd}(x)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $n \leqslant x$, die Produkt einer ungeraden Anzahl von Primfaktoren sind. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\nu_{ev}(x) - \nu_{odd}(x) = O(x^{\theta+\varepsilon}).$$

Beweis. a) Wir zeigen zunächst, dass die Aussagen (i),(ii) und (iii) untereinander äquivalent sind.

Die Äquivalenz (ii) $\iff$ (iii) folgt aus der früher bewiesenen Tatsache, dass

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2}).$$

(ii) ⇒ (i). Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}(x) &= \int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{u}{\log u}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} \\ &= \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + O(1).\end{aligned}$$

Wir setzen $\vartheta(x) = x + r(x)$. Nach Voraussetzung (ii) ist $r(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Mit Abelscher partieller Summation ergibt sich

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{p\leqslant x} 1 = \sum_{p\leqslant x} \frac{\log p}{\log p} \\ &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(u)}{u\log^2 u} du \\ &= \underbrace{\frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u}}_{\mathrm{Li}(x)+O(1)} + \underbrace{\frac{r(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{r(u)}{u\log^2 u} du}_{O(x^{\theta+\varepsilon})}.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

(i) ⇒ (ii). Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{\mathrm{Li}(u)}{u} du &= \mathrm{Li}(u)\log u\Big|_2^x - \int_2^x \frac{\log u}{\log u} du \\ &= \mathrm{Li}(x)\log x - x + O(1).\end{aligned}$$

Wir setzen $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + R(x)$. Nach Voraussetzung (i) ist $R(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Mit Abelscher partieller Summation ergibt sich

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &= \sum_{p\leqslant x} \log p = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(u)}{u} du \\ &= \underbrace{\mathrm{Li}(x)\log x - \int_2^x \frac{\mathrm{Li}(u)}{u} du}_{x+O(1)} + \underbrace{R(x)\log x - \int_2^x \frac{R(u)}{u} du}_{O(x^{\theta+\varepsilon'})}.\end{aligned}$$

für jedes $\varepsilon' > \varepsilon$. Daraus folgt die Behauptung.

b) Jetzt beweisen wir, dass die Aussagen (iii), (iv) und (v) jeweils RH(θ) implizieren.

(iii) ⇒ RH(θ). Wir betrachten die Funktion

$$F(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$$

Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ besitzt $F(s)$ eine Darstellung als Dirichlet-Reihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s} =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

mit

$$A(x) := \sum_{n \leqslant x} a_n = \sum_{n \leqslant x} (\Lambda(n) - 1) = \psi(x) - \lfloor x \rfloor.$$

Nach Voraussetzung (iii) gilt $A(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Daraus folgt aber, dass die Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für $\mathrm{Re}(s) > \theta$ konvergiert, also ist die die Funktion

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$$

für $\mathrm{Re}(s) > \theta$ holomorph. Deshalb kann $\zeta(s)$ dort keine Nullstellen haben, da sonst $\zeta'(s)/\zeta(s)$ eine Polstelle hätte. Also gilt $\mathrm{RH}(\theta)$.

(iv) $\Rightarrow \mathrm{RH}(\theta)$. Diese Implikation wird analog zur Implikation (iii) $\Rightarrow \mathrm{RH}(\theta)$ bewiesen. Wir betrachten die Funktion $G(s) := 1/\zeta(s)$; sie besitzt für $\mathrm{Re}(s) > 1$ eine Darstellung als Dirichlet-Reihe

$$G(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Die Partialsummen der Koeffizienten sind

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n).$$

Nach Voraussetzung (iv) gilt $M(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Daraus folgt, dass die Dirichlet-Reihe von $1/\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \theta$ konvergiert. Also hat $\zeta(s)$ keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}(s) > \theta$, d.h. es gilt $\mathrm{RH}(\theta)$.

(v) $\Rightarrow \mathrm{RH}(\theta)$. Die Liouvillesche Funktion $\lambda : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ ist wie folgt definiert: Sei $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ die kanonische Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}_1$ und $k := \sum_{j=1}^{r} k_j$. Dann setzt man $\lambda(n) := (-1)^k$. Damit gilt

$$\sum_{n \leqslant x} \lambda(n) = \nu_{ev}(x) - \nu_{odd}(x)$$

und (Übungsaufgabe!)

$$H(s) := \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}.$$

Nach Voraussetzung (v) gilt $\sum_{n\leqslant x}\lambda(n) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$. Daraus folgt, dass die Dirichlet-Reihe von $H(s) = \zeta(2s)/\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \theta$ konvergiert. Also hat $\zeta(s)$ keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}(s) > \theta$, d.h. es gilt $\mathrm{RH}(\theta)$.

c) Jetzt zeigen wir, dass umgekehrt $\mathrm{RH}(\theta)$ die Aussagen (iii), (iv) und (v) impliziert. Unter der Voraussetzung $\mathrm{RH}(\theta)$ sind die Funktionen

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)-1}{n^s}, \\ G(s) &= \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}, \\ H(s) &= \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s} \end{aligned}$$

in der Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) > \theta\}$ holomorph. Jetzt verwenden wir folgenden Satz:

8.2. Satz. *Es gelte* $\mathrm{RH}(\theta)$, $(\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1)$. *Dann gilt für jedes* $\theta_1 > \theta$ *und jedes* $\varepsilon > 0$

$$|\zeta(s)| = O(t^\varepsilon), \qquad \left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = O(t^\varepsilon) \quad \textit{und} \quad |\zeta'(s)| = O(t^\varepsilon)$$

für $|t| = |\mathrm{Im}(s)| \to \infty$, *gleichmäßig in* $\sigma = \mathrm{Re}(s) \geqslant \theta_1$.

Aus diesem Satz, dessen Beweis wir vorläufig zurückstellen, ergibt sich, dass für jedes $\theta_1 > \theta$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$F(s) = O(t^\varepsilon), \quad G(s) = O(t^\varepsilon), \quad H(s) = O(t^\varepsilon) \quad \text{für } |t| = |\mathrm{Im}(s)| \to \infty,$$

gleichmäßig in $\sigma = \mathrm{Re}(s) \geqslant \theta_1$. Deshalb lässt sich auf die Funktionen $F(s)$, $G(s)$ und $H(s)$ der Satz 7.10 anwenden und es folgt jeweils für die Partialsummen der Koeffizienten, dass

$$\begin{aligned} \psi(x) - \lfloor x \rfloor &= \sum_{n\leqslant x}(\Lambda(n)-1) = O(x^{\theta+\varepsilon}), \\ M(x) &= \sum_{n\leqslant x}\mu(n) = O(x^{\theta+\varepsilon}), \\ \nu_{ev}(x) - \nu_{odd}(x) &= \sum_{n\leqslant x}\lambda(x) = O(x^{\theta+\varepsilon}) \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Das bedeutet aber, dass (iii), (iv) und (v) erfüllt sind.

Damit ist Satz 8.1 bewiesen, bis auf den noch ausstehenden Beweis von Satz 8.2.

Dazu müssen wir etwas weiter ausholen. Der nächste Satz zeigt, wie man für eine holomorphe Funktion aus einer Schranke für den Realteil den Betrag der Funktion abschätzen kann.

8.3. Satz (Borel/Carathéodory). *Sei $f : D_R \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion in der Kreisscheibe $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Es gelte*

$$\sup\{\operatorname{Re} f(z) : z \in D_R\} =: M < \infty.$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leqslant r < R$

$$|f(z)| \leqslant 2M \frac{r}{R-r} + |f(0)| \frac{R+r}{R-r}.$$

Man beachte, dass nur eine *obere* Schranke für $\operatorname{Re}(f(z))$ nötig ist.

Beweis. a) Wir behandeln zunächst den Spezialfall

$$R = 1, \quad M = \tfrac{1}{2}, \quad f(0) = 0.$$

Wegen $\operatorname{Re}(f(z)) \leqslant \frac{1}{2}$ folgt

$$|f(z)| \leqslant |1 - f(z)| \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| < 1,$$

d.h. für die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{1 - f(z)} \quad \text{gilt} \quad |g(z)| \leqslant 1 \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| < 1.$$

Da $g(0) = 0$, folgt aus dem Schwarzschen Lemma $|g(z)| \leqslant |z|$ für $|z| < 1$, also

$$\left|\frac{f(z)}{1 - f(z)}\right| \leqslant |z| \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{1 - |z|}.$$

Damit ist der Spezialfall bewiesen.

b) Sei jetzt $R > 0$ und M beliebig, aber immer noch $f(0) = 0$ vorausgesetzt (daraus folgt $M \geqslant 0$). Der Fall $M = 0$ ist trivial, denn dann ist $f(z)$ konstant gleich 0. Der Fall $M > 0$ kann durch Betrachtung der Funktion

$$g(z) := \frac{1}{2M} f(Rz)$$

sofort auf a) zurückgeführt werden.

c) Im allgemeinen Fall setzen wir $g(z) := f(z) - f(0)$. Dann gilt

$$\sup_{|z|<R} \operatorname{Re}(g(z)) \leqslant \sup_{|z|<R} \operatorname{Re}(f(z)) + |f(0)|,$$

also nach b)

$$|f(z) - f(0)| \leqslant 2(M + |f(0)|)\frac{r}{R-r},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leqslant 2M\,\frac{r}{R-r}+|f(0)|\Big(\frac{2r}{R-r}+1\Big)\\ &= 2M\,\frac{r}{R-r}+|f(0)|\,\frac{R+r}{R-r}\,, \qquad\qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

8.4. Anwendung. Im Folgenden gehen wir von der Annahme RH(θ) mit einem $\theta < 1$ aus. Sei

$$G_\theta := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \theta\} \smallsetminus \{\sigma \in \mathbb{R} : \sigma \leqslant 1\}$$

G_θ ist einfach zusammenhängend und nach Annahme ist $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in G_\theta$. Also existiert in G_θ ein eindeutiger Zweig von $\log\zeta(s)$, den wir so wählen, dass er für reelles $\sigma > 1$ reelle Werte annimmt. Da für jede $\delta > 0$ gilt

$$\zeta(s) = O(t) \quad \text{für } |t| \to \infty \quad \text{gleichmäßig in } \mathrm{Re}(s) > \delta,$$

gibt eine Konstante $C > 0$ und ein $t_0 > 0$, so dass

$$\mathrm{Re}\log\zeta(s) = \log|\zeta(s)| \leqslant C\log t \quad \text{für alle } s = \sigma + it \in G_\theta \text{ mit } |t| \geqslant t_0.$$

Hierauf kann nun der Satz von Borel/Carathéodory angewendet werden und wir erhalten folgende Abschätzung von $\log\zeta(s)$.

8.5. Satz. *Es gelte* RH(θ) *mit* $\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1$. *Dann gilt für alle* $\theta_1 > \theta$

$$|\log\zeta(\sigma + it)| = O(\log|t|) \quad \textit{für } |t| \to \infty$$

gleichmäßig in $\sigma \geqslant \theta_1$.

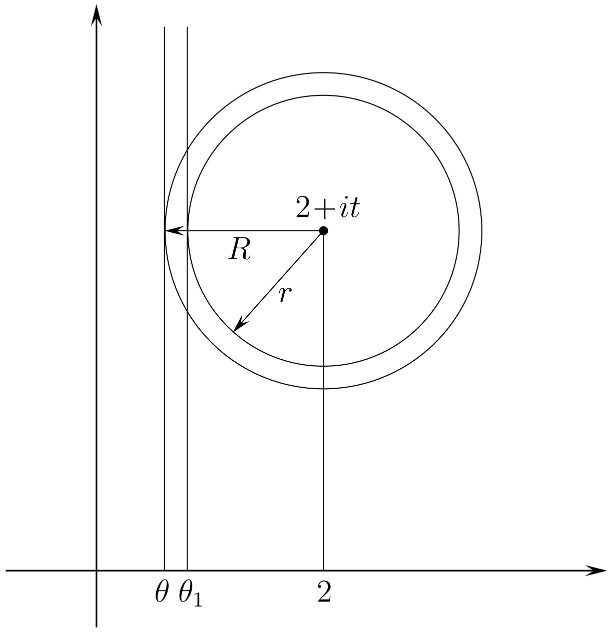
Beweis. Wir wenden Satz 8.3 auf die Funktion $f(s) := \log\zeta(s)$ im Kreis mit Mittelpunkt $2 + it$ und Radius $R := 2 - \theta$ und den konzentrischen Kreis mit Radius $r := 2 - \theta_1$ an, siehe Figur 8.1. Nach der Vorbemerkung gibt es eine Konstante $C_1 > 0$, so dass $\mathrm{Re}\, f$ im größeren Kreis einer Abschätzung $\mathrm{Re}\, f(s) \leqslant C_1 \log|t|$, ($|t| \geqslant t_0$), genügt. Da $|\log\zeta(2 + it)| \leqslant \log\zeta(2)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, gilt im kleineren Kreis

$$\sup_{|s-(2+it)|\leqslant r} |\log\zeta(s)| \;\leqslant\; 2C_1\log|t|\frac{r}{R-r} + \frac{R+r}{R-r}\log\zeta(2) = O(\log|t|).$$

Weil jeder Punkt $\sigma + it$ mit $\sigma \geqslant \theta_1$ im Kreis $\{|s - (2 + it)| \leqslant r\}$ liegt, folgt die Behauptung.

8.6. Satz (Hadamardscher Dreikreisesatz). *Sei* $0 \leqslant \rho < R$ *und*

$$f : \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < R\} \to \mathbb{C}$$



Figur 8.1

eine holomorphe Funktion, die nicht identisch verschwindet. Für $\rho < r < R$ *werde definiert*

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Dann ist $\log M(r)$ *eine konvexe Funktion von* $\log r$*.*

Bemerkungen. a) Es gilt stets $M(r) > 0$, denn aus $M(r) = 0$ würde folgen, dass f identisch 0 ist.

b) Eine auf einem offenen Intervall $]a, b[\ \subset \mathbb{R}$ definierte reelle Funktion F ist genau dann konvex, wenn für alle $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ gilt

$$F(x_2) \leqslant \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F(x_3).$$

Damit sagt der Hadamardsche Dreikreisesatz, dass

$$\log M(r_2) \leqslant \frac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)} \log M(r_1) + \frac{\log(r_2/r_1)}{\log(r_3/r_1)} \log M(r_3),$$

oder nach Anwendung der Exponentialfunktion

$$M(r_2) \leqslant M(r_1)^{\lambda} M(r_3)^{1-\lambda} \quad \text{mit } \lambda := \frac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)}.$$

Beweis von Satz 8.6. Seien $\rho < r_1 < r_2 < r_3 < R$. Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{M(r_3)}{M(r_1)} = \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^{\alpha},$$

d.h.

$$M(r_3)r_3^{-\alpha} = M(r_1)r_1^{-\alpha} =: M_0.$$

Definiere die reelle Funktion $H : \{\rho < |z| < R\} \to \mathbb{R}$

$$H(z) := |f(z)| \cdot |z|^{-\alpha}.$$

Dann ist

$$\sup_{|z|=r_3} H(z) = M_0 = \sup_{|z|=r_1} H(z).$$

Nun ist H lokal der Betrag einer holomorphen Funktion. Also gilt für H das Maximum-Prinzip, insbesondere

$$\sup_{|z|=r_2} H(z) = M(r_2)r_2^{-\alpha} \leqslant M_0,$$

also

$$M(r_2)r_2^{-\alpha} \leqslant M_0 = M_0^\lambda M_0^{1-\lambda} = M(r_1)^\lambda r_1^{-\alpha\lambda} M(r_3)^{1-\lambda} r_3^{-\alpha(1-\lambda)}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Speziell für

$$\lambda := \frac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)}$$

gilt $r_2 = r_1^\lambda r_3^{1-\lambda}$, und dies eingesetzt ergibt die Behauptung.

8.7. Nun können wir Satz 8.2 beweisen. Unter der Voraussetzung RH(θ), ($\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1$), ist zu zeigen, dass für jedes $\theta_1 > \theta$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$|\zeta(s)| = O(t^\varepsilon), \quad |\zeta'(s)| = O(t^\varepsilon) \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = O(t^\varepsilon)$$

für $t = \mathrm{Im}(s) \to \infty$ gleichmäßig in $\sigma = \mathrm{Re}(s) \geqslant \theta_1$.

Beweis. Wir wählen noch θ' und δ mit $\theta < \theta' < \theta_1$ und $0 < \delta < 1$ und betrachten für $t \geqslant 2$ die Kreise mit Mittelpunkt $2 + it$ und Radien

$$r_1 := 1 - \delta, \qquad r_2 := 2 - \theta_1, \qquad r_3 := 2 - \theta'.$$

Wir wenden den Dreikreisesatz für diese Kreise auf die Funktion $\log\zeta(s)$ an. Sei

$$M_t(r) := \sup\{|\log\zeta(s)| : |s - (2 + it)| = r\}.$$

Da $|\log\zeta(s)| \leqslant \log\zeta(\sigma)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma := \mathrm{Re}(s) > 1$, ist

$$M_t(r_1) \leqslant \log\zeta(1 + \delta) =: C_1$$

und nach Satz 8.5 gilt

$$M_t(r_3) \leqslant C_3 \log t \qquad \text{für } t \geqslant t_3$$

mit einer Konstanten $C_3 > 0$. Es folgt

$$M_t(r_2) \leqslant C_1^\lambda (C_3 \log t)^{1-\lambda} = C(\log t)^\alpha,$$

wobei $\alpha := 1 - \lambda = \dfrac{\log(r_2/r_1)}{\log(r_3/r_1)} < 1$, also

$$|\log \zeta(s)| \leqslant C(\log t)^\alpha \quad \text{für alle } \sigma = \mathrm{Re}(s) \geqslant \theta_1 \text{ und } t = \mathrm{Im}(s) \geqslant t_3.$$

Daraus folgt $|\zeta(s)| \leqslant e^{C(\log t)^\alpha}$. Wegen

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^\alpha}{\log t} = 0$$

ist $e^{C(\log t)^\alpha} = O(t^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, woraus die Behauptung für die Funktion $\zeta(s)$ folgt. Wegen $|\log \zeta(s)| = |\log(1/\zeta(s))|$ gilt sie auch für $1/\zeta(s)$, und für $\zeta'(s)$ folgt sie mittels Cauchy-Abschätzung für den Betrag der Ableitung einer holomorphen Funktion.