5. Funktional-Gleichung der Zetafunktion

5.1. Satz (Poissonsche Summenformel). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit*

$$f(x) = O(|x|^{-2}) \quad \textit{und} \quad f'(x) = O(|x|^{-2}) \quad \textit{für } |x| \to \infty$$

und sei

$$\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixt} dx.$$

die Fourier-Transformierte von f. Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

Bemerkung. Der Satz gilt auch unter schwächeren Voraussetzungen über die Funktion f. Diese Form genügt uns aber. Die Bedingung $f(x) = O(|x|^{-2})$ garantiert die Existenz des Fourier-Integrals und der unendlichen Summe $\sum f(n)$.

Beweis. Wir definieren eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$F(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n).$$

Nach der Voraussetzung über f konvergiert diese Reihe gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, ebenso (wegen $f'(x) = O(|x|^{-2})$) die Reihe der Ableitungen. Daher ist F eine stetig differenzierbare Funktion. Außerdem gilt offensichtlich $F(x+1) = F(x)$, d.h. F ist periodisch mit der Periode 1. Wir können deshalb F in eine Fourier-Reihe

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inx}$$

entwickeln. Da F stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen F. Für die Fourier-Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 F(x) e^{-2\pi inx} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k) e^{-2\pi inx} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2\pi inx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi inx} dx = \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}.$$

Die Reihen konvergieren sogar gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Setzt man hierin $x = 0$, erhält man die Behauptung.

5.2. Beispiele

a) Wir wollen die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := e^{-\pi x^2}$$

berechnen.

Behauptung. f ist seine eigene Fourier-Transformierte, d.h.

$$(1) \qquad \hat{f}(t) = e^{-\pi t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Es ist

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixt} dx$$

Speziell für $t = 0$ ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = [\text{Substitution } u = \pi x^2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\tfrac{1}{2}) = 1. \end{aligned}$$

Für $t \neq 0$ ist

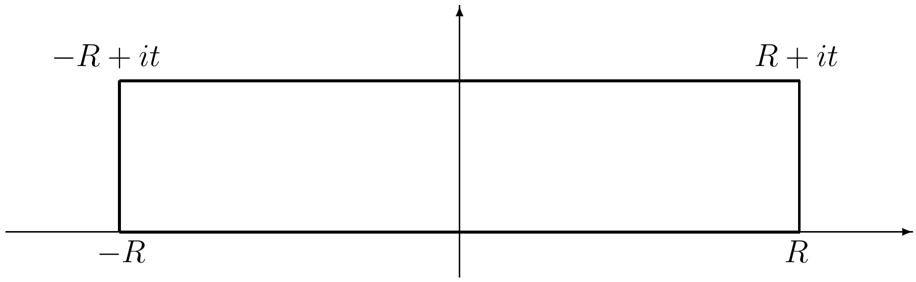
$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi ixt} dx = e^{-\pi t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+it)^2} dx.$$

Wir zeigen jetzt

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+it)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Daraus folgt dann unmittelbar die Behauptung (1). Um (2) zu beweisen, wählen wir ein $R > 0$ und integrieren die holomorphe Funktion $f(z) := e^{-\pi z^2}$ über den Rand des Rechtecks mit den Ecken $-R, R, R+it, -R+it$, siehe Figur 5.1. Da der Integrand $f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, ist das gesamte Randintegral gleich 0, d.h.

$$(3) \qquad \int_{-R}^{R} f(z)dz = \int_{-R+it}^{R+it} f(z)dz - \int_{R}^{R+it} f(z)dz + \int_{-R}^{-R+it} f(z)dz$$



Figur 5.1

Man sieht unmittelbar, dass

$$\Big|\int_{\pm R}^{\pm R+ia} f(z)dz\Big| \longrightarrow 0 \quad \text{für } R\to\infty$$

Da

$$\int_{-R+it}^{R+it} f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{-(x+it)^2}dx$$

folgt aus (3) durch Grenzübergang $R\to\infty$ die Gleichung (2) und damit die Behauptung (1).

b) Für eine reelle Zahl $\lambda > 0$ betrachten wir die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto f_\lambda(x) := e^{-\pi\lambda x^2}$$

Behauptung. Für die Fourier-Transformierte gilt

$$\widehat{f_\lambda}(t) = \frac{e^{-\pi t^2/\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Beweis hierfür. Nach Definition der Fourier-Transformation gilt

$$\widehat{f_\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\lambda x^2} e^{-2\pi i x t}\,dx.$$

Mit den Substitutionen $\xi = \sqrt{\lambda}\,x$ und $\tau = t/\sqrt{\lambda}$ kann man dies auf a) zurückführen und erhält man

$$\widehat{f_\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\xi^2} e^{-2\pi i\xi\tau}\frac{d\xi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{-\pi\tau^2}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{-\pi t^2/\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \quad \text{q.e.d.}$$

5.3. Satz (Funktionalgleichung der Theta-Reihe).
Die Theta-Reihe ist für reelles $x > 0$ definiert durch

$$\theta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}.$$

Sie genügt der folgenden Funktionalgleichung:

$$\theta\Big(\frac{1}{x}\Big) = \sqrt{x}\,\theta(x) \quad \textit{für alle } x > 0,$$

d.h.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/x}.$$

Bemerkung. Die Theta-Reihe und ihre sämtlichen Ableitungen konvergieren gleichmäßig auf jedem Intervall $[\varepsilon, \infty[$, $\varepsilon > 0$; daher ist θ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $]0, \infty[$.

Beweis. Wir wenden die Poissonsche Summenformel auf die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_\lambda(x) := e^{-\pi\lambda x^2}$$

an. Dabei ist $\lambda > 0$ ein reeller Parameter. Da $\widehat{f_\lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, e^{-\pi t^2/\lambda}$, folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\lambda n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\pi n^2/\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Schreibt man x statt λ, ergibt sich die Behauptung des Satzes.

5.4. Corollar. *Die Theta-Reihe* $\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$ *genügt der Abschätzung*

$$\theta(x) = O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big) \quad \textit{für } x \searrow 0.$$

5.5. Wir stellen jetzt einen Zusammenhang zwischen der Theta-Reihe und der Zetafunktion her. Dazu betrachten wir für $x > 0$ die Funktion

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

Es gilt

$$\theta(x) = 1 + 2g(x), \quad \text{d.h.} \quad g(x) = \tfrac{1}{2}(\theta(x) - 1).$$

Für $x \to \infty$ konvergiert $g(x)$ exponentiell gegen 0, genauer gilt $g(x) = O(e^{-\pi x})$. Aus Corollar 5.4 folgt

(4) $\quad g(x) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad$ für $x \searrow 0.$

Die Funktionalgleichung der Theta-Reihe $\theta(1/x) = x^{1/2}\theta(x)$ liefert

(5) $\quad g\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^{1/2}g(x) + \frac{1}{2}(x^{1/2} - 1).$

5.6. Lemma. *Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *gilt*

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{s/2}\int_0^\infty x^{s/2}\Big(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}\Big)\frac{dx}{x}.$$

Bemerkung. Aus der Abschätzung (4) folgt, dass das Integral für $\mathrm{Re}(s) > 1$ existiert.

Beweis. Wir gehen aus vom der Eulerschen Integral-Darstellung für $\Gamma(s/2)$,

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty x^{s/2}e^{-x}\frac{dx}{x}, \quad (\mathrm{Re}(s) > 0),$$

und machen die Substitution $x = \pi n^2\tilde{x}$ mit einer einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_1$. Da $d\tilde{x}/\tilde{x} = dx/x$, erhalten wir (nachdem wir wieder x statt $\tilde{x}$ schreiben)

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = n^s\pi^{s/2}\int_0^\infty x^{s/2}e^{-\pi n^2 x}\,\frac{dx}{x}.$$

Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt dann

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \pi^{s/2}\int_0^\infty x^{s/2}e^{-\pi n^2 x}\frac{dx}{x}\\ &= \pi^{s/2}\int_0^\infty x^{s/2}\Big(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}\Big)\frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Summation und Integration ist wegen des Satzes von der majorisierten Konvergenz erlaubt.

5.7. Satz (Funktionalgleichung der Zetafunktion).

a) *Die Funktion*

$$\xi(s) := \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s),$$

ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ bis auf zwei Pole erster Ordnung an den Stellen $s = 0$, $s = 1$. Sie genügt der Funktionalgleichung

$$\xi(1 - s) = \xi(s).$$

b) *Die Zetafunktion selbst genügt der Funktionalgleichung*

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\,\Gamma(s)\cos(\tfrac{\pi s}{2})\,\zeta(s).$$

Beweis. a) Nach Lemma 5.6 gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$ mit $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$

$$\xi(s) = \int_0^\infty x^{s/2} g(x)\frac{dx}{x} = \int_0^1 x^{s/2} g(x)\frac{dx}{x} + \int_1^\infty x^{s/2} g(x)\frac{dx}{x}. \tag{6}$$

Im Integral von 0 nach 1 machen wir die Substitution $x \mapsto 1/x$ und verwenden die Funktionalgleichung (5).

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{s/2} g(x)\frac{dx}{x} &= \int_1^\infty x^{-s/2} g(1/x)\frac{dx}{x}\\ &= \int_1^\infty x^{(1-s)/2} g(x)\frac{dx}{x} + \tfrac{1}{2}\int_1^\infty \left(x^{(1-s)/2} - x^{-s/2}\right)\frac{dx}{x}\\ &= \int_1^\infty x^{(1-s)/2} g(x)\frac{dx}{x} + \Big(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\Big)\end{aligned}$$

Dabei haben benutzt, dass $\int_1^\infty x^{-\alpha}\frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha}$ für $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.
Damit ergibt sich aus (6)

$$\xi(s) = \int_1^\infty (x^{(1-s)/2} + x^{s/2})\, g(x)\frac{dx}{x} + \Big(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\Big). \tag{7}$$

Dies wurde für $\mathrm{Re}(s) > 1$ abgeleitet. Da $g(x)$ für $x \to \infty$ exponentiell gegen 0 geht, konvergiert das Integral auf der rechten Seite gegen eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $h(s)$. Somit liefert (7) eine auf ganz $\mathbb{C}$ gültige Darstellung von $\xi(s)$ als meromorphe Funktion mit Polen 1. Ordnung an den Stellen $s = 1$ und $s = 0$. Da die rechte Seite von (7) invariant unter der Abbildung $s \mapsto 1-s$ ist, folgt $\xi(1-s) = \xi(s)$, d.h. Teil a) des Satzes ist bewiesen.

b) Wir verwenden folgende Formeln aus der Theorie der Gamma-Funktion:

(i) $$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \qquad \text{(Euler)}$$

(ii) $$\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{z+1}{2}\Big) = 2^{1-z}\sqrt{\pi}\Gamma(z) \qquad \text{(Legendre)}$$

Die Funktionalgleichung der Funktion $\xi(s)$ aus Teil a) bedeutet

$$\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\,\zeta(1-s) = \pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\,\zeta(s),$$

woraus folgt

$$\zeta(1-s) = \pi^{1/2-s}\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)^{-1}\zeta(s). \tag{8}$$

Aus (i) ergibt sich

$$\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)^{-1}\Gamma\Big(\frac{1+s}{2}\Big)^{-1} = \frac{\sin(\pi\frac{1+s}{2})}{\pi} = \frac{\cos(\frac{\pi s}{2})}{\pi}.$$

Damit lässt sich (8) umformen zu

$$\zeta(1-s) = \pi^{-1/2-s}\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1+s}{2}\Big)\cos(\tfrac{\pi s}{2})\,\zeta(s),$$

woraus unter Benutzung von (ii) folgt

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos(\tfrac{\pi s}{2})\,\zeta(s), \qquad \text{q.e.d.}$$

5.8. Corollar.
a) *Für jede ganze Zahl $k > 0$ gilt*

$$\zeta(-2k) = 0.$$

Dies sind die einzigen Nullstellem der Zetafunktion in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) \leqslant 0$. *Man nennt diese Nullstellen die* trivialen Nullstellen *der Zetafunktion.*

b) $\qquad \zeta(0) = -\frac{1}{2}.$

c) *Für jede ganze Zahl $k > 0$ gilt*

$$\zeta(1-2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}.$$

Beweis. a) Wir benutzen die Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos\tfrac{\pi s}{2}\,\zeta(s)$$

$\mathrm{Re}(1-s) \leqslant 0$ ist gleichbedeutend mit $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$. Da $\zeta(s) \neq 0$ für $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$, kommen die einzigen Nullstellen der rechten Seite in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 1$ von der Cosinus-Funktion. Nun ist

$$\cos\tfrac{\pi s}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s = 1 + 2k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Daraus folgt Behauptung a).

b) Wir schreiben die Funktionalgleichung in der Form $\zeta(1-s) = f_1(s)f_2(s)$ mit

$$f_1(s) := 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s) \quad \text{und} \quad f_2(s) := \cos\tfrac{\pi s}{2}\,\zeta(s).$$

f_1 ist holomorph in einer Umgebung von $s = 1$ und $f_1(1) = 1/\pi$. Die Funktion f_2 ist ebenfalls holomorph in einer Umgebung von $s = 1$, da der Pol der Zetafunktion von der Nullstelle des Cosinus aufgehoben wird. Um $f_2(1)$ zu berechnen, bestimmen wir die ersten Glieder der Taylor- bzw. Laurent-Entwicklung der Faktoren.

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{\pi s}{2} &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}(s-1)+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2}(s-1)\right) = -\tfrac{\pi}{2}(s-1)+O((s-1)^3),\\ \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + (\text{holomorphe Funktion}).\end{aligned}$$

Multipliziert man beide Ausdrücke, erhält man $f_2(s) = -\frac{\pi}{2}+O(s-1)$, d.h. $f_2(1) = -\frac{\pi}{2}$. Daher gilt

$$\zeta(0) = f_1(1)f_2(1) = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{q.e.d.}$$

c) Wir benutzen zum Beweis die Eulerschen Formeln

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k} \quad \text{für alle } k \geqslant 1.$$

Die Funktionalgleichung liefert

$$\begin{aligned}\zeta(1-2k) &= 2^{1-2k}\pi^{-2k}\Gamma(2k)\cos(\pi k)\zeta(2k)\\ &= \frac{2}{(2\pi)^{2k}}(2k-1)!\,(-1)^k\zeta(2k).\end{aligned}$$

Setzt man darin die Eulerschen Formeln ein, erhält man

$$\zeta(1-2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}.$$

5.9. Die nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion

Nach Corollar 5.8 besitzt die Riemannsche Zetafunktion außer den trivialen Nullstellen bei $s = -2k$, $k \in \mathbb{N}_1$, höchstens noch Nullstellen mit $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Man nennt $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ den *kritischen Streifen*. Wir werden sehen, dass die Zetafunktion im kritischen Streifen unendlich viele Nullstellen besitzt. Aufgrund der Funktionalgleichung weisen die Nullstellen ein gewisses Symmetrie-Verhalten bzgl. der *kritischen Geraden* $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$ auf, das wir jetzt diskutieren.

Wir betrachten die schon in Satz 5.7 definierte Funktion

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Da der Faktor $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ für $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ holomorph und ungleich null ist, haben $\zeta(s)$ und $\xi(s)$ in dem Streifen diesselben Nullstellen. Da $\xi(s)$ für $s \in \mathbb{R}$ reell ist, gilt nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip

(i) $\quad \xi(\overline{s}) = \overline{\xi(s)};$

außerdem haben wir die Funktionalgleichung

(ii) $\xi(1-s) = \xi(s)$.

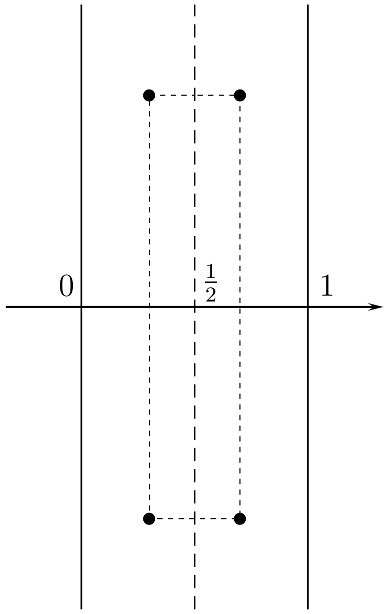
Aus (i) und (ii) ergibt sich: Falls

$$\xi(\tfrac{1}{2} + x + it) = 0 \quad \text{mit} \ -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2},$$

dann ist auch

$$\begin{aligned} \xi(\tfrac{1}{2} + x - it) &= 0, \\ \xi(\tfrac{1}{2} - x + it) &= 0, \\ \xi(\tfrac{1}{2} - x - it) &= 0. \end{aligned}$$

Die nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion liegen also sowohl symmetrisch zur reellen Achse, als auch zur Geraden $\{\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$, siehe Figur 5.2.



Figur 5.2

Wahrscheinlich kann der Fall $x \neq 0$ gar nicht auftreten, denn nach der berühmten *Riemannschen Vermutung* aus dem Jahre 1859 liegen alle nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion sogar auf der Spiegelungs-Geraden $\{\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$. Diese Vermutung ist noch unbewiesen, aber alle bis heute durch numerische Rechnungen gefundenen nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion liegen tatsächlich auf der kritischen Geraden $\{\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$.