

## 4. Beweis des Primzahlsatzes

**4.1.** Für reelles  $x > 0$  bezeichnet man mit  $\pi(x)$  die Anzahl der Primzahlen  $p \leq x$ . Dies kann man auch so schreiben:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

$\pi(x)$  ist eine Treppenfunktion mit Sprüngen der Höhe 1 bei allen Primzahlen. Natürlich gilt  $\pi(x) = 0$  für  $x < 2$ . Einige andere Werte sind

$x$	10	100	1000	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$
$\pi(x)$	4	25	168	1229	9592	78498	664579	5761455

Man ist interessiert an dem asymptotischen Verhalten der Funktion  $\pi(x)$  für  $x \rightarrow \infty$ . Gauß machte durch Zählung in Primzahltabellen die Beobachtung, dass die Dichte der Primzahlen von der Größenordnung  $x$  etwa gleich  $1/\log x$  ist und er vermutete, dass  $\pi(x)$  etwa gleich

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

ist. Diese Funktion  $\text{Li}(x)$  heißt der *Integral-Logarithmus* von  $x$ .

Tatsächlich gilt nach dem 1896 von Hadamard und de la Vallée Poussin bewiesenen Primzahlsatz die asymptotische Gleichheit

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x), \quad \text{d.h.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)} = 1.$$

**4.2. Lemma.** Für jede natürliche Zahl  $k \geq 1$  und alle reellen Zahlen  $x \geq 2$  gilt

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^k t} = \frac{t}{\log^k t} \Big|_2^x + k \int_2^x \frac{dt}{\log^{k+1} t} = \frac{x}{\log^k x} + O\left(\frac{x}{\log^{k+1} x}\right).$$

Insbesondere hat man die asymptotische Beziehung

$$\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* Die Gleichung

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^k t} = \frac{t}{\log^k t} \Big|_2^x + k \int_2^x \frac{dt}{\log^{k+1} t}$$

folgt unmittelbar durch partielle Integration. Das Lemma ist deshalb bewiesen, wenn wir zeigen können, dass

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^k t} = O\left(\frac{x}{\log^k x}\right) \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Beweis hierfür. Wir zerlegen den Integrationsweg in die Intervalle  $[2, \sqrt{x}]$  und  $[\sqrt{x}, x]$  (o.B.d.A. ist  $x \geq 4$ ) und erhalten

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{dt}{\log^k t} &= \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^k t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^k t} \\ &\leq \frac{\sqrt{x}}{(\log 2)^k} + \frac{x}{(\log \sqrt{x})^k} \\ &= O(\sqrt{x}) + \frac{2^k x}{\log^k x} = O\left(\frac{x}{\log^k x}\right), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Zum Beweis des Primzahlsatzes brauchen wir noch weitere Vorbereitungen. Insbesondere verwenden wir die von Tschebyscheff um 1850 eingeführten Funktionen  $\vartheta$  und  $\psi$ , die zur Untersuchung der Primzahl-Verteilung oft bequemer sind als direkt die Funktion  $\pi(x)$ .

**4.3. Definition.** Die Tschebyscheffschen Funktionen  $\vartheta, \psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &:= \sum_{p \leq x} \log p, \\ \psi(x) &:= \sum_{p^k \leq x} \log p. \end{aligned}$$

Dabei wird im ersten Fall über alle Primzahlen  $p \leq x$  und im zweiten Fall über alle Primzahlpotenzen  $p^k \leq x$ ,  $k \geq 1$ , summiert.

Die Funktion  $\vartheta(x)$  ist eine monoton wachsende Treppenfunktion, die bei allen Primzahlen  $x = p$  Sprünge der Höhe  $\log p$  macht, die Funktion  $\psi(x)$  macht Sprünge der Höhe  $\log p$  bei allen Primzahlen  $p$  und allgemeiner Primzahlpotenzen  $x = p^k$ , ( $k \geq 1$ ).

Da  $p^k \leq x$  gleichbedeutend mit  $p \leq x^{1/k}$  ist, lässt sich die Funktion  $\psi$  wie folgt aus der Funktion  $\vartheta$  ableiten:

$$\psi(x) = \sum_{k \geq 1} \vartheta(x^{1/k}).$$

Die Summe über  $k$  ist in Wirklichkeit nur endlich, da für genügend große  $k$ , genauer für

$$k > \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor,$$

gilt, dass  $x^{1/k} < 2$ , also  $\vartheta(x^{1/k}) = 0$ .

Die Definition der  $\psi$ -Funktion lässt sich mithilfe der von Mangoldtischen Funktion

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^k, p \text{ prim, } k \geq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

auch schreiben als

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

**4.4. Lemma.** Für die Tschebyscheffsche Theta-Funktion gilt für alle  $x > 0$

$$\vartheta(x) < x \log 4.$$

*Bemerkung.* Es ist  $\log 4 = 1.386294 \dots$

*Beweis.* Die Behauptung ist offenbar äquivalent zur Aussage

$$P(n) := \prod_{p \leq n} p < 4^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_1.$$

Dies beweisen wir durch Induktion nach  $n$ .

*Induktionsbeginn.* Für  $n \leq 4$  verifiziert man die Aussage direkt.

*Induktionsschritt.* Sei  $N > 4$  und die Behauptung für alle  $n < N$  schon bewiesen. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle.

1. *Fall.*  $N = 2m - 1$  ungerade. Dann ist  $m \geq 3$ . Wir betrachten den Binomialkoeffizienten

$$\binom{2m-1}{m-1} = \frac{(2m-1)(2m-2) \cdot \dots \cdot (m+1)}{(m-1)!}.$$

Für jede Primzahl  $p$  mit  $m+1 \leq p \leq 2m-1$  gilt  $p \mid \binom{2m-1}{m-1}$ , denn  $p$  teilt den Zähler, aber nicht den Nenner. Also folgt

$$P(m, 2m-1) := \prod_{m < p \leq 2m-1} p \leq \binom{2m-1}{m-1}.$$

Da  $\binom{2m-1}{m-1} = \binom{2m-1}{m}$  beide in der Binomialformel für

$$(1+1)^{2m-1} = \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{k} = 2^{2m-1}$$

vorkommen, gilt  $\binom{2m-1}{m-1} \leq 2^{2m-2}$ , also folgt

$$P(m, 2m-1) \leq 2^{2m-2} = 4^{m-1}.$$

Nach Induktions-Voraussetzung gilt  $P(m) < 4^m$ , also insgesamt

$$P(2m - 1) = P(m)P(m, 2m - 1) < 4^m \cdot 4^{m-1} = 4^{2m-1}.$$

Damit ist die Behauptung für  $N = 2m - 1$  bewiesen.

2. Fall.  $N = 2m$  gerade. Da trivialerweise  $P(2m) = P(2m - 1)$ , folgt die Behauptung aus dem ersten Fall.

**4.5. Corollar.** *Für  $x \rightarrow \infty$  gelten die folgenden Beziehungen:*

- a)  $\vartheta(x) = O(x)$ ,
- b)  $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}) = O(x)$ .

*Beweis.* Behauptung a) folgt unmittelbar aus Lemma 4.4.

Zu b) Es ist  $\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \sum_{k \geq 3} \vartheta(x^{1/k})$ . Da die Anzahl der nicht-verschwindenden Summanden in der letzten Summe  $< \lceil \log x / \log 2 \rceil$  ist, folgt

$$\sum_{k \geq 3} \vartheta(x^{1/k}) = O(x^{1/3} \log x)$$

und weiter

$$\sum_{k \geq 2} \vartheta(x^{1/k}) = O(x^{1/2}) + O(x^{1/3} \log x) = O(x^{1/2}).$$

Daraus folgt Behauptung b).

**4.6. Satz** (Tschebyscheff). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i)  $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$ ,
- (ii)  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ ,
- (iii)  $\vartheta(x) \sim x$ ,
- (iv)  $\psi(x) \sim x$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus Lemma 4.2, die Äquivalenz von (iii) und (iv) aus Corollar 4.5. Es ist also nur noch die Äquivalenz von (ii) und (iii) zu beweisen.

Wir wenden Abelsche partielle Summation auf folgende Darstellung von  $\pi(x)$  an:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} a_n \cdot \frac{1}{\log n} \quad \text{mit } a_n = \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p \text{ prim,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\log x} \right) = -\frac{1}{x \log^2 x}$ , ergibt sich

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt.$$

Nach Corollar 4.5a) ist  $\vartheta(t)/t$  beschränkt, also lässt sich nach Lemma 4.2 das letzte Integral durch  $O(x/\log^2 x)$  abschätzen. Es folgt

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \quad \text{und}$$

$$\vartheta(x) = \pi(x) \log x + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Daraus ergibt sich die Äquivalenz (ii)  $\iff$  (iii), q.e.d.

Satz 4.6 bedeutet, dass es zum Beweis des Primzahlsatzes genügt, die asymptotische Beziehung  $\psi(x) \sim x$  zu beweisen.

E. Landau hat 1911 weitere Äquivalenzen zum Primzahlsatz bewiesen, die mit der Möbiusschen  $\mu$ -Funktion zusammenhängen. Man betrachte folgende Funktionen

$$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \quad \text{und} \quad m(x) := \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n}$$

Nach Landau sind die Beziehungen  $M(x) = o(x)$  und  $m(x) = o(1)$  zum Primzahlsatz äquivalent.

Dazu müssen wir etwas weiter ausholen.

**4.7. Der Hyperbel-Trick.** In der analytischen Zahlentheorie tauchen manchmal Summen der Gestalt

$$\sum_{k\ell \leq x} c_{k\ell}$$

auf. Dabei sind  $c_{k\ell}$  ( $k, \ell \geq 1$ ) komplexe Zahlen,  $x$  eine positive reelle Zahl und es wird über alle Paare  $k, \ell$  positiver ganzer Zahlen summiert, für die  $k\ell \leq x$  ist. Der Summationsbereich ist also

$$H_x := \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : k\ell \leq x\}.$$

Dies sind alle Gitterpunkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene, die unterhalb oder auf der Hyperbel  $\xi\eta = x$  liegen. Seien nun  $u, v$  positive reelle Zahlen mit  $uv = x$  und

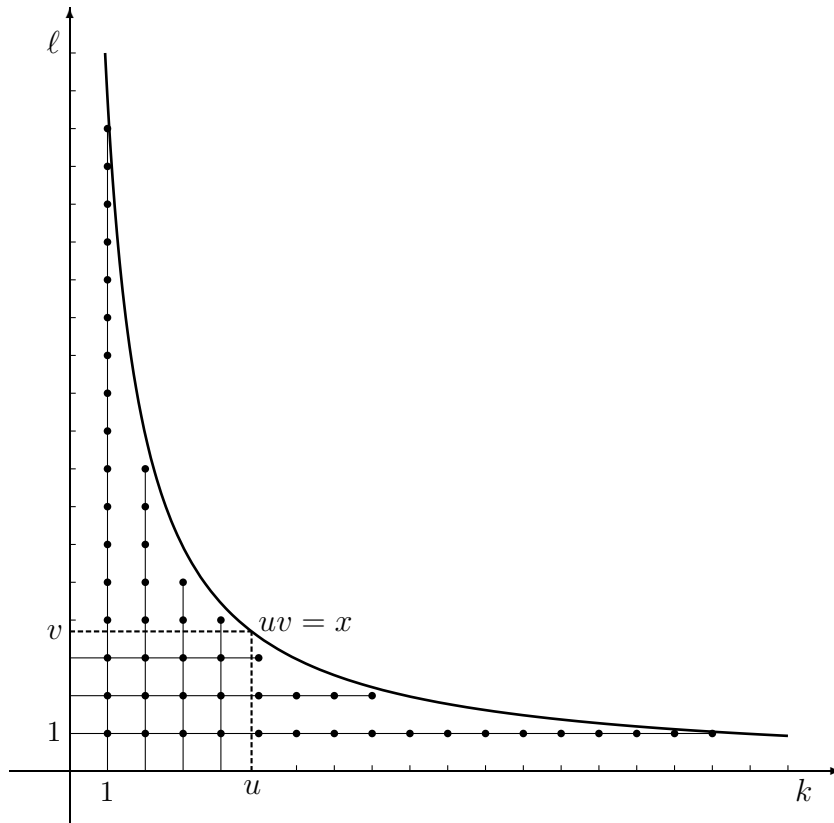
$$H'_x := \{(k, \ell) \in H_x : k \leq u\} = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : k \leq u, \ell \leq x/k\},$$

$$H''_x := \{(k, \ell) \in H_x : \ell \leq v\} = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : \ell \leq v, k \leq x/\ell\}.$$

Damit gilt

$$H_x = H'_x \cup H''_x \quad \text{und} \quad H'_x \cap H''_x = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : k \leq u, \ell \leq v\},$$

vgl. Figur 4.1. Hier ist  $H'_x$  die Menge der durch die vertikalen Linien verbundenen Gitterpunkte und  $H''_x$  die Menge der durch die horizontalen Linien verbundenen Gitterpunkte.



Figur 4.1

Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k\ell \leq x} c_{k\ell} &= \sum_{(k,\ell) \in H_x} c_{k\ell} \\ &= \sum_{(k,\ell) \in H'_x} c_{k\ell} + \sum_{(k,\ell) \in H''_x} c_{k\ell} - \sum_{(k,\ell) \in H'_x \cap H''_x} c_{k\ell} \\ &= \sum_{k \leq u} \left( \sum_{\ell \leq x/k} c_{k\ell} \right) + \sum_{\ell \leq v} \left( \sum_{k \leq x/\ell} c_{k\ell} \right) - \sum_{\substack{k \leq u \\ \ell \leq v}} c_{k\ell}. \end{aligned}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist  $c_{k\ell} = a_k b_\ell$  mit Folgen  $(a_k)$  und  $(b_\ell)$ . Aus der obigen Formel ergibt sich unmittelbar

**4.8. Satz.** Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$  und  $(b_n)_{n \geq 1}$  zwei Folgen komplexer Zahlen. Für reelles  $x > 0$  werde definiert

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n \quad \text{und} \quad B(x) := \sum_{n \leq x} b_n.$$

Dann gilt für alle reellen  $u, v, x > 0$  mit  $uv = x$

$$\sum_{k\ell \leq x} a_k b_\ell = \sum_{k \leq u} a_k B\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{\ell \leq v} b_\ell A\left(\frac{x}{\ell}\right) - A(u)B(v).$$

Als Anwendung von Satz 4.8 beweisen wir nun den *Dirichletschen Teilersatz*. Dieser macht eine Aussage über die durchschnittliche Teilerzahl von natürlichen Zahlen.

**4.9. Satz (Dirichlet).** Für eine natürliche Zahl  $n$  bezeichne  $\tau(n)$  die Anzahl der positiven Teiler von  $n$ . Dann gilt für reelles  $x > 0$

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}).$$

Dabei ist  $\gamma$  die Euler-Mascheronische Konstante.

Die mittlere Teilerzahl der natürlichen Zahlen  $\leq x$  ist also etwa  $\log x + 2\gamma - 1$ . Der Fehler ist von der Größenordnung  $O(1/\sqrt{x})$ .

*Beweis.* Die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl  $n$  ist gleich der Anzahl der Paare  $(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$  mit  $k\ell = n$ . Dies lässt sich schreiben als

$$\tau(n) = \sum_{k\ell=n} 1.$$

Daraus folgt

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{k\ell \leq x} 1 = \sum_{k\ell \leq x} a_k b_\ell$$

mit  $a_k = b_\ell = 1$  für alle  $k, \ell \geq 1$ . Mit den Bezeichnungen von Satz 4.8 ist dann

$$A(x) = B(x) = \lfloor x \rfloor$$

und es folgt mit  $u = v = \sqrt{x}$

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + \sum_{\ell \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{\ell} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 = 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - x + O(\sqrt{x}).$$

Nun folgt unter Benutzung von  $\sum_{n \leq v} 1/n = \log v + \gamma + O(1/v)$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor &= \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{x}{n} + O(\sqrt{x}) \\ &= x(\log \sqrt{x} + \gamma + O(1/\sqrt{x})) + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{x}{2}(\log x + 2\gamma) + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1) ein, ergibt sich die Behauptung.

**4.10. Satz.** *Zwischen den Aussagen*

- (i)  $\psi(x) \sim x$ ,
- (ii)  $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$ ,
- (iii)  $m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1)$

bestehen die Implikationen (iii)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (i).

*Bemerkung.* Es gelten sogar die Äquivalenzen (iii)  $\iff$  (ii)  $\iff$  (i). Wir benötigen aber nur die im Satz behaupteten Implikationen. Sie bedeuten, dass es zum Beweis des Primzahlsatzes genügt,  $m(x) = o(1)$ , d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

zu beweisen.

*Beweis.*

(iii)  $\Rightarrow$  (ii). Mit Abelscher partieller Summation erhält man

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} n = m(x)x - \int_1^x m(u)du.$$

Nach (iii) ist  $m(x) = o(1)$ , also  $m(x)x = o(x)$ ; ebenso

$$(2) \quad \int_1^x m(u)du = o(x).$$

Letzteres sieht man z.B. so: Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann existiert ein  $x_0 \geq 1$ , so dass  $|m(x)| < \varepsilon$  für alle  $x \geq x_0$ , also

$$\left| \int_1^x m(u)du \right| \leq \left| \int_1^{x_0} m(u)du \right| + |x - x_0| \varepsilon$$



woraus folgt

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left| \int_1^x m(u) du \right| \leq \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt (2) und damit  $M(x) = o(x)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Wir betrachten die folgende Dirichletreihe

$$F(s) := -\zeta'(s) - \zeta(s)^2 + 2\gamma\zeta(s) =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

wobei  $\gamma$  die Euler-Mascheronische Konstante ist. Da  $\zeta'(s) = -\sum \frac{\log n}{n^s}$  und  $\zeta(s)^2 = \sum \frac{\tau(n)}{n^s}$ , gilt

$$a(n) = \log n - \tau(n) + 2\gamma.$$

Übrigens ist die Funktion  $F$  an der Stelle  $s = 1$  holomorph, denn die Berechnung der Hauptteile ergibt

$$\frac{1}{(s-1)^2} - \left( \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma}{(s-1)} \right) + \frac{2\gamma}{(s-1)} = 0$$

Nach Satz 4.9 ist

$$\begin{aligned} (3) \quad A(x) &:= \sum_{n \leq x} a(n) = \sum_{n \leq x} \log n - \sum_{n \leq x} \tau(n) + 2\gamma[x] \\ &= x(\log x - 1) + O(\log x) - x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}) + 2\gamma x + O(1) \\ &= O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Außerdem betrachten wir die Funktion

$$G(s) := F(s) \cdot \frac{1}{\zeta(s)} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) + 2\gamma =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}.$$

Es gilt  $c = a * \mu$  und

$$c(n) = \Lambda(n) - 1 + 2\gamma\delta_{1n},$$

also für  $x \geq 1$

$$C(x) := \sum_{n \leq x} c(n) = \psi(x) - [x] + 2\gamma = \psi(x) - x + O(1).$$

Die Behauptung (i) ist also äquivalent zu  $C(x) = o(x)$ . Es ist

$$C(x) = \sum_{n \leq x} (a * \mu)(n) = \sum_{k\ell \leq x} a(k)\mu(\ell).$$

Unter Anwendung des Hyperbel-Tricks (Satz 4.8) erhalten wir für  $1 \leq y \leq x$

$$(4) \quad C(x) = \sum_{k \leq y} a(k)M\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{\ell \leq x/y} \mu(\ell)A\left(\frac{x}{\ell}\right) - A(y)M\left(\frac{x}{y}\right).$$

Nach (3) ist  $A(z) = O(\sqrt{z})$ , d.h.  $|A(z)| \leq K\sqrt{z}$  für alle  $z \geq 1$  mit einer Konstanten  $K > 0$ . Damit schätzen wir den 2. Summanden ab:

$$\left| \sum_{\ell \leq x/y} \mu(\ell)A\left(\frac{x}{\ell}\right) \right| \leq K\sqrt{x} \sum_{\ell \leq x/y} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \leq K'\sqrt{x} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{K'}{\sqrt{y}} \cdot x.$$

Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  kann man daher  $y$  so groß wählen, dass

$$\left| \sum_{\ell \leq x/y} \mu(\ell)A\left(\frac{x}{\ell}\right) \right| < \varepsilon x \quad \text{für alle } x \geq y.$$

Da nach Voraussetzung  $M(z) = o(z)$ , folgt nun aus (4)

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|C(x)|}{x} \leq \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt daraus  $C(x) = o(x)$ , q.e.d.

Wir kommen nun zum entscheidenden analytischen Hilfsmittel für den Beweis des Primzahlsatzes.

**4.11. Satz** (D.J. Newman 1980). *Sei*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

*eine Dirichlet-Reihe mit  $|a_n| \leq 1$  für alle  $n$ . Die dadurch in der Halbebene  $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$  definierte holomorphe Funktion lasse sich holomorph in eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene  $\{\operatorname{Re}(s) \geq 1\}$  fortsetzen. Dann konvergiert die Dirichlet-Reihe auch für  $s = 1$  und es gilt*

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n},$$

*wobei hier  $f(1)$  den Wert der fortgesetzten Funktion bezeichnet.*

*Beweis.* Wir führen zuerst eine Koordinaten-Transformation durch, die den Punkt  $s = 1$  in den Nullpunkt transformiert. Sei

$$F(s) := f(1+s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \quad \text{mit } b_n := \frac{a_n}{n}, \text{ also } |b_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Die Funktion  $F$  ist in der rechten Halbebene  $H(0) = \{\operatorname{Re}(s) > 0\}$  holomorph und lässt sich in eine offene Umgebung  $U \supset \overline{H(0)}$  der abgeschlossenen Halbebene fortsetzen. Die fortgesetzte Funktion werde ebenfalls mit  $F$  bezeichnet. Es sei

$$F_N(s) := \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n^s}.$$

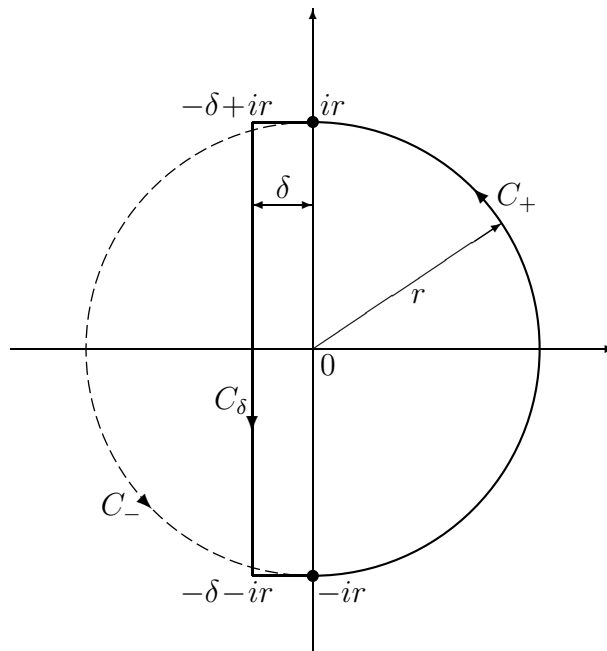
Die Behauptung des Satzes ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (F(0) - F_N(0)) = 0.$$

Die Funktion  $F - F_N$  ist holomorph in  $U \supset \overline{H(0)}$ . Daher kann ihr Wert an der Stelle  $s = 0$  mittels der Cauchyschen Integralformel

$$F(0) - F_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s)) \frac{1}{s} ds$$

berechnet werden. Hier ist  $C := C_+ + C_\delta$  folgende Kurve in  $U$ , vgl. Figur 4.2:



Figur 4.2

$C_+$  ist der Halbkreis mit Radius  $r > 0$  in der rechten Halbebene von  $-ir$  nach  $+ir$  und  $C_\delta$  ist der Polygonzug von  $ir$  über  $-\delta + ir$  und  $-\delta - ir$  nach  $-ir$ . Dabei ist die Konstante  $\delta > 0$  in Abhängigkeit von  $r$  so klein zu wählen, dass die Kurve  $C$  und ihr Inneres ganz in  $U$  liegen.

Die Funktion  $s \mapsto (F(s) - F_N(s))N^s$  ist ebenfalls holomorph in  $U$  und ihr Wert an der Stelle  $s = 0$  ist gleich  $F(0) - F_N(0)$ . Daher haben wir

$$F(0) - F_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s)) N^s \frac{1}{s} ds$$

Mit einem Trick von Newman kann man auch schreiben

$$(*) \quad F(0) - F_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s)) N^s \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) ds.$$

Dies ist richtig, da die hinzugefügte Funktion

$$s \mapsto (F(s) - F_N(s)) N^s \frac{s}{r^2}$$

in  $U$  holomorph ist und daher ihr Integral über  $C$  verschwindet.

Zur späteren Verwendung bemerken wir noch, dass für  $|s| = r$  gilt

$$\left( \frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) = \frac{\bar{s}}{s\bar{s}} + \frac{s}{r^2} = \frac{s + \bar{s}}{r^2} = \frac{2\sigma}{r^2}, \quad \text{wobei } \sigma = \operatorname{Re}(s).$$

Zum Beweis des Satzes müssen wir nun das Integral  $(*)$  abschätzen.

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wir wählen  $r := 4/\varepsilon$  und dazu ein geeignetes  $\delta > 0$ . Die Integralabschätzung erfolgt nun in drei Schritten.

1) Abschätzung des Integrals über die Kurve  $C_+$ .

Da die Dirichlet-Reihe  $F$  für  $\operatorname{Re}(s) > 0$  konvergiert, ist

$$F(s) - F_N(s) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}.$$

Dies können wir wie folgt abschätzen

$$|F(s) - F_N(s)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}} \leq \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = \frac{N^{-\sigma}}{\sigma}.$$

Für den Integranden

$$G_1(s) := (F(s) - F_N(s)) N^s \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right)$$

gilt deshalb auf  $C_+$

$$|G_1(s)| \leq \frac{N^{-\sigma}}{\sigma} N^\sigma \frac{2\sigma}{r^2} = \frac{2}{r^2}$$

also

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} G_1(s) ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} \frac{2}{r^2} |ds| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{r^2} \cdot \pi r = \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

2) Abschätzung des Integrals  $\int_{C_\delta} F_N(s) N^s \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) ds$ .

Da die Funktion  $F_N$  in der ganzen Ebene holomorph ist, können wir den Integrationsweg  $C_\delta$  durch den Halbkreis  $C_-$  vom Radius  $r$  in der linken Halbebene von  $ir$  nach  $-ir$  ersetzen.

*Behauptung.* Die Funktion  $F_N$  genügt in der linken Halbebene  $\sigma = \operatorname{Re}(s) < 0$  der Abschätzung

$$|F_N(s)| \leq N^{-\sigma} \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{|\sigma|} \right)$$

*Beweis hierfür.* Es ist

$$|F_N(s)| \leq \sum_{n=1}^N \frac{|b_n|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1+\sigma}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1-\alpha}} \quad \text{mit } \alpha := -\sigma = |\sigma|$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

i) Es sei  $0 < \alpha < 1$ . Da  $x \mapsto 1/x^{1-\alpha}$  monoton fällt, gilt

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^{1-\alpha}} = 1 + \frac{1}{\alpha} (N^\alpha - 1) \leq \frac{N^\alpha}{\alpha} \leq N^\alpha \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

ii) Falls  $\alpha \geq 1$ , ist  $x \mapsto 1/x^{1-\alpha}$  (schwach) monoton wachsend, also

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq N^{\alpha-1} + \int_1^N x^{\alpha-1} dx = N^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha} (N^\alpha - 1) \leq N^\alpha \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es folgt für den Integranden

$$G_2(s) := F_N(s) N^s \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right)$$

auf  $C_-$  die Abschätzung

$$|G_2(s)| \leq |F_N(s) N^s| \frac{2|\sigma|}{r^2} \leq \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{|\sigma|} \right) \frac{2|\sigma|}{r^2} \leq 2 \left( \frac{1}{Nr} + \frac{1}{r^2} \right),$$

also

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} G_2(s) ds \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{C_-} \left( \frac{1}{Nr} + \frac{1}{r^2} \right) |ds| \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{r} \leq \frac{2}{r} = \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $N \geq r$ .

3) Abschätzung des Integrals  $\int_{C_\delta} F(s) N^s \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) ds$ .

Die Funktion

$$s \mapsto G_3(s) := F(s) \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right)$$

ist holomorph in einer Umgebung der Kurve  $C_\delta$ . Deshalb gibt es eine Konstante  $K > 0$ , so dass

$$|G_3(s)| \leq K \quad \text{für alle } s \in C_\delta.$$

Daher genügt der Integrand

$$F(s)N^s \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) = G_3(s)N^s$$

auf  $C_\delta$  der Abschätzung

$$|G_3(s)N^s| \leq KN^\sigma.$$

Für  $N \rightarrow \infty$  konvergiert  $KN^\sigma$  auf der Kurve  $C_\delta$  mit Ausnahme der Endpunkte wegen  $\sigma = \operatorname{Re}(s) < 0$  monoton fallend gegen 0. Aus dem Satz über monotone Konvergenz von Integralen folgt nun

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_{C_\delta} G_3(s)N^s ds \right| = 0;$$

es gibt deshalb eine natürliche Zahl  $N_0$ , die wir  $\geq r$  annehmen können, so dass

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} G_3(s)N^s ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } N \geq N_0.$$

Durch Zusammenfassung der Abschätzungen unter 1), 2) und 3) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} |F(0) - F_N(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s)) N^s \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) ds \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \text{für alle } N \geq N_0, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

**4.12. Corollar.** Die unendliche Reihe  $\sum \mu(n)/n$  konvergiert und hat den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

*Beweis.* Dies folgt durch Anwendung von Satz 4.11 auf die Funktion

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Da  $\zeta(s)$  keine Nullstellen mit  $\operatorname{Re}(s) = 1$  hat, ist  $1/\zeta$  in einer Umgebung der abgeschlossenen Halbebene  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq 1\}$  holomorph. Da  $\zeta$  bei  $s = 1$  einen Pol hat, gilt  $(1/\zeta)(1) = 0$ .

Aufgrund der Sätze 4.6 und 4.10 folgt nun der zuerst 1896 von Jacques Hadamard und Charles de la Vallée Poussin bewiesene

**4.13. Satz** (Primzahlsatz).

$$\pi(x) \sim \operatorname{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Aus dem Primzahlsatz lässt sich folgende Aussage über das Wachstum der Primzahlen ableiten.

**4.14. Satz.** *Es sei  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3, p_4, \dots$  die Folge aller Primzahlen, der Größe nach geordnet. Dann gilt die asymptotische Beziehung*

$$p_n \sim n \log n \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* Aus dem Primzahlsatz

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$$

ergibt sich durch Logarithmieren

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log \pi(x) + \log \log x - \log x) = 0.$$

Teilt man durch  $\log x$ , erhält man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\log \pi(x)}{\log x} + \frac{\log \log x}{\log x} - 1 \right) = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \pi(x)}{\log x} = 1.$$

Substituiert man dies in (5), ergibt sich

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log \pi(x)}{x} = 1.$$

Speziell für  $x = p_n$  gilt nach Definition  $\pi(p_n) = n$ . Daher folgt aus (6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{p_n} = 1, \quad \text{q.e.d.}$$

**4.15. Satz.** *Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $x_0 = x_0(\varepsilon)$ , so dass für jedes  $x \geq x_0$  im Intervall  $[x, x(1 + \varepsilon)]$  mindestens eine Primzahl liegt.*

*Beweis.* Nach dem Primzahlsatz gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x(1 + \varepsilon))}{\pi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \varepsilon)}{x} \cdot \frac{\log x}{\log((1 + \varepsilon)x)} = 1 + \varepsilon.$$

Deshalb gibt es ein  $x_0$ , so dass

$$\pi(x) < \pi(x(1 + \varepsilon)) \quad \text{für } x \geq x_0.$$

*Bemerkung.* Der Satz 4.15 macht keine Aussage darüber, wie groß  $x_0$  als Funktion von  $\varepsilon > 0$  ist. Für  $\varepsilon = 1$  kann man mit elementaren Mitteln beweisen, dass für jede ganze Zahl  $n \geq 2$  mindestens eine Primzahl  $p$  existiert mit  $n \leq p < 2n$ . Diese Aussage ist das sog. *Bertrandsche Postulat*. Es wurde zuerst von Tschebyscheff 1852 bewiesen.