Anhang A: Die Gamma-Funktion

A.1. Definition. Die *Gamma-Funktion* ist für eine komplexe Variable z mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ durch das Euler-Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

definiert. Da mit $x := \mathrm{Re}(z)$ gilt $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t}$, folgt die Konvergenz des Integrals aus der entsprechenden Tatsache im reellen Fall. Man hat die Abschätzung

$$|\Gamma(z)| \leqslant \Gamma(\mathrm{Re}(z)) \quad \text{für } \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Da das Integral holomorph von z abhängt, folgt, dass die Gamma-Funktion in der Halbebene $H(0) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ holomorph ist. Wie im reellen Fall beweist man mit partieller Integration die Funktionalgleichung

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1).$$

Da $\Gamma(1) = 1$, ergibt sich daraus

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Durch $(n+1)$-malige Anwendung der Funktionalgleichung erhält man

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}.$$

In dieser Formel, die zunächst für $\mathrm{Re}(z) > 0$ hergeleitet wurde, stellt die rechte Seite eine in der Halbebene $H(-n-1) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -n-1\}$ meromorphe Funktion dar, die Pole 1. Ordnung an den Stellen $z = -k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ hat. Daher kann man diese Formel benutzen, um die Gamma-Funktion zu einer meromorphen Funktion in der ganzen komplexen Ebene $\mathbb{C}$ fortzusetzen. Diese fortgesetzte Funktion hat Pole erster Ordnung an den Stellen $z = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, und ist sonst überall holomorph. Ab jetzt sei als Gamma-Funktion immer diese in ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion verstanden.

Die Gamma-Funktion kann folgendermaßen axiomatisch charakterisiert werden:

A.2. Satz (H. Wielandt 1939). *Sei F eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) *F ist holomorph in der Halbebene $H(0) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.*
ii) *F genügt der Funktionalgleichung $zF(z) = F(z+1)$.*
iii) *F ist beschränkt im Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 2\}$.*

Dann ist F bis auf eine multiplaktive Konstante gleich der Gamma-Funktion:

$$F(z) = c\,\Gamma(z), \quad \textit{wobei } c := F(1).$$

Beweis. Es ist klar, dass Γ die Eigenschaften i) bis iii) besitzt. Die Eigenschaft iii) folgt daraus, dass $|\Gamma(z)| \leqslant \Gamma(\mathrm{Re}(z))$ und $\Gamma(x)$ auf dem Intervall $1 \leqslant x \leqslant 2$ als stetige Funktion beschränkt ist.

Wir setzen $c := F(1)$ und

$$F_0(z) := F(z) - c\,\Gamma(z).$$

Dann genügt F_0 ebenso den Bedingungen i) bis iii) und es gilt $F_0(1) = 0$. Aus der Funktionalgleichung $F_0(z) = F_0(z+1)/z$ folgt, dass F_0 an der Stelle $z = 0$ holomorph ist und dass F_0 im Streifen $S_0 := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\}$ beschränkt ist. Daher ist auch die Funktion

$$\Phi(z) := F_0(z)F_0(1-z)$$

in S_0 beschränkt. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi(z+1) &= F_0(z+1)F_0(-z) \\ &= zF_0(z)F_0(-z) = -F_0(z)F_0(-z+1) = -\Phi(z). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass Φ periodisch mit Periode 2 und in ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist daher Φ konstant. Da $\Phi(1) = -\Phi(0)$, muss die Konstante gleich 0 sein. Aus der Gleichung $0 = F_0(z)F_0(1-z)$ folgt nun, dass auch F_0 identisch verschwindet, d.h. $F(z) = c\,\Gamma(z)$, q.e.d.

A.3. Satz. a) *Für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant 0\}$ gilt*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}$$

(Dies ist die Gaußsche Darstellung der Gamma-Funktion.)

b) $1/\Gamma$ *ist eine ganze holomorphe Funktion mit der Weierstraßschen Produkt-Darstellung*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{-z/n}, \qquad (\gamma = \text{Euler-Mascheronische Konstante}).$$

Das Produkt konvergiert normal in $\mathbb{C}$.

Beweis. Wir beweisen a) und b) simultan in mehreren Schritten.

1) Sei $E(z) := (1-z)e^z$. Dann gilt, wie man aus der Potenzreihen-Entwicklung sieht,

$$|E(z) - 1| \leqslant \frac{|z|^2}{2}\Big(1 + |z| + |z|^2 + \ldots\Big),$$

also $|E(z)-1| \leqslant |z|^2$ für $|z| \leqslant \frac{1}{2}$. Daraus folgt

$$\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-z/n} = 1 + f_n(z) \quad \text{mit } |f_n(z)| \leqslant \frac{|z|^2}{n^2} \text{ für } n \geqslant 2|z|.$$

Deshalb konvergiert das unendliche Produkt

$$G(z) := e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-z/n}$$

normal in ganz $\mathbb{C}$ gegen eine holomorphe Funktion mit Nullstellen an den Stellen $z = n \in \mathbb{Z}$, $n \leqslant 0$.

2) Wir setzen

$$\begin{aligned} F_n(z) &:= \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)} \qquad \text{und} \\ G_n(z) &:= e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-z/k}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$F_n(z)G_n(z) = n^z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{n} e^{-z/k} = \exp\Big\{z\Big(\log n + \gamma - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)\Big\}.$$

Daraus folgt nach Definition der Euler-Mascheronischen Konstanten

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z)G_n(z) = \exp 0 = 1.$$

Da nach 1) für alle $z \in U := \mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant 0\}$ gilt $G(z) = \lim\limits_{n\to\infty} G_n(z) \neq 0$, existiert für alle $z \in U$ auch der Limes $F(z) := \lim_{n\to\infty} F_n(z)$ mit

$$F(z) = \frac{1}{G(z)}.$$

3) Es bleibt noch zu beweisen, dass $F(z) = \Gamma(z)$. Dies zeigen wir mittels Satz A.2.

Bedingung i) ist erfüllt, da $G(z)$ in der Halbebene $H(0)$ holomorph und ungleich 0 ist.

Zur Funktionalgleichung ii): Wegen

$$F_n(z+1) = \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)(z+n+1)}$$

gilt

$$\frac{F_n(z+1)}{F_n(z)} = \frac{z\cdot n}{(z+n+1)}, \quad \text{also} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{F_n(z+1)}{F_n(z)} = z.$$

Dies zeigt $F(z+1) = zF(z)$.

Zu iii). Für $1 \leqslant x := \operatorname{Re}(z) \leqslant 2$ gilt

$$|F_n(z)| \leqslant \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} = F_n(x),$$

also nach Grenzübergang $|F(z)| \leqslant F(x)$. Da aber $F(x) = \frac{1}{G(x)}$ im Intervall $1 \leqslant x \leqslant 2$ stetig, also beschränkt ist, ist auch $|F(z)|$ im Streifen $1 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 2$ beschränkt.

Nach Satz A.2 gilt also $F(z) = c\Gamma(z)$ mit einer Konstanten c. Diese Konstante ist gleich

$$F(1) = \lim_{n\to\infty} F_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \text{q.e.d.}$$

A.4. Lemma. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze holomorphe Funktion. Es gebe positive reelle Konstanten K, α und r_0, so dass*

$$\operatorname{Re} f(z) \leqslant K|z|^\alpha \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \textit{ mit } |z| \geqslant r_0.$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leqslant \alpha$.

Beweis. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ die Taylor-Entwicklung von f. Dann gilt für $z = re^{it}$

$$\operatorname{Re} f(re^{it}) = \operatorname{Re} c_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty (c_n r^n e^{int} + \overline{c}_n r^n e^{-int}).$$

Daraus folgt für alle $r > 0$

$$\operatorname{Re} f(0) = \operatorname{Re} c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{it})\, dt,$$

sowie für alle ganzen Zahlen $n \geqslant 1$

$$c_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{Re} f(re^{it})\big)\, e^{-int}\, dt.$$

Da $\int_0^{2\pi} e^{-int} dt = 0$, folgt weiter

$$-c_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \big(Kr^\alpha - \operatorname{Re} f(re^{it})\big)\, e^{-int}\, dt.$$

Für $r \geqslant r_0$ ist nach Voraussetzung $Kr^\alpha \geqslant \operatorname{Re} f(re^{it})$, also

$$|Kr^\alpha - \operatorname{Re} f(re^{it})| = Kr^\alpha - \operatorname{Re} f(re^{it}).$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \big(Kr^\alpha - \operatorname{Re} f(re^{it})\big)\, dt = \frac{2}{r^n} \cdot (Kr^\alpha - \operatorname{Re} f(0)) .$$

Lässt man r gegen ∞ gehen, erhält man

$$c_n = 0 \quad \text{für alle } n > \alpha,$$

also ist f ein Polynom vom Grad $\leqslant \lfloor \alpha \rfloor$.

A.5. Satz. *Für die Gamma-Funktion gelten folgende Formeln:*

a) Ergänzungssatz von Euler:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

b) Verdoppelungsformel von Legendre:

$$\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{z+1}{2}\Big) = 2^{1-z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(z).$$

Bemerkung. Als Spezialfall von a) ergibt sich mit $z = \frac{1}{2}$ die bekannte Formel

(1) $\qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

Beweis

a) Da $\Gamma(z)$ für $1 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 2$ beschränkt ist, sind die Funktionen $\Gamma(1+z)$ und $\Gamma(2-z)$ für $0 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 1$ beschränkt. Daraus folgt, dass die Funktion

$$\Phi(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\Gamma(1+z)\Gamma(2-z)}{z(1-z)}$$

in $S_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 1,\ |\operatorname{Im}(z)| \geqslant 1\}$ beschränkt ist. Die Funktion Φ hat Pole 1. Ordnung in den Punkten $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$ und ist sonst überall holomorph. Es gilt

$$\Phi(z+1) = -\Phi(z) \quad \text{und} \quad \Phi(-z) = -\Phi(z).$$

Da $\sin(\pi z)$ Nullstellen der Ordnung 1 an den Stellen $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$, hat, ist das Produkt

$$F(z) := \sin(\pi z)\Phi(z) = \sin(\pi z)\Gamma(z)\Gamma(1-z)$$

auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und überall $\neq 0$. Außerdem ist F periodisch mit Periode 1 und eine gerade Funktion, d.h. $F(z) = F(-z)$. Schreibt man F in der Form

$$F(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z}\Gamma(1+z)\Gamma(1-z),$$

sieht man $F(0) = \pi$. Aus der Beschränktheit von Φ auf S_1 erhält man mit einer Konstanten $K > 0$ eine Abschätzung

$$|F(z)| \leqslant K e^{\pi|z|} \quad \text{für alle } z \in S_1.$$

Da F stetig und periodisch ist, gilt eine solche Abschätzung auf ganz $\mathbb{C}$. Weil F nirgends verschwindet, gibt es eine ganze holomorphe Funktion g mit $F(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der Abschätzung für $|F(z)|$ ergibt sich wegen $\log|F(z)| = \operatorname{Re} g(z)$, dass

$$\operatorname{Re} g(z) \leqslant K_1|z| \quad \text{für alle } |z| \geqslant r_0.$$

mit geeigneten Konstanten $K_1, r_0 > 0$. Aus Lemma A.4 folgt nun

$$F(z) = e^{a+bz}, \quad (a, b \in \mathbb{C}).$$

Da F eine gerade Funktion ist, muss $b = 0$ sein. Also ist F eine Konstante, d.h. $F(z) = F(0) = \pi$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit ist Teil a) bewiesen.

b) Dies zeigt man durch Anwendung von Satz A.2 auf die Funktion

$$F(z) := 2^z\, \Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{z+1}{2}\Big).$$

Es ist klar, dass $F(z)$ in der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 0$ holomorph und im Streifen $1 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 2$ beschränkt ist. Man berechnet

$$F(z+1) = 2^{z+1}\Gamma\Big(\frac{z+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{z}{2}+1\Big) = 2^{z+1}\Gamma\Big(\frac{z+1}{2}\Big)\frac{z}{2}\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big) = zF(z).$$

Also gilt nach Satz A.2

$$F(z) = c\Gamma(z) \quad \text{mit } c = F(1) = 2\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

A.6. Corollar (Produkt-Darstellung des Sinus).

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

Beweis. Aus Satz A.3b) folgt

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{1}{(-z)\Gamma(-z)} = e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{n}\Big)e^{z/n}.$$

Multipliziert man dies mit der Produkt-Darstellung von $1/\Gamma(z)$, ergibt sich mit Satz A.5a) die Behauptung.

A.7. Corollar. a) Wallissche Produktformel:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

b) *Für $n \to \infty$ gilt die asymptotische Beziehung*

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Bemerkung. In b) ist $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ der mittlere Binomial-Koeffizient in der Formel

$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}.$$

Die Zahl $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ lässt sich interpretieren als die Wahrscheinlichkeit, dass beim $(2n)$-maligen Münzwurf als Ergebnis genau n-mal "Zahl" und genau n-mal "Wappen" erscheint.

Beweis. a) Aus dem Sinus-Produkt (Corollar A.6) erhält man mit $z = \frac{1}{2}$

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{4n^2}\Big) = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

b) Die Wallissche Formel besagt

$$\begin{aligned}\pi &= 2\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n-1)}.\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhält man

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\cdot\frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}.$$

Da $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, folgt weiter

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\binom{2n}{n}^{-1}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

A.8. Satz (Stirlingsche Formel). *Für $n \to \infty$ hat man die asymptotische Beziehung*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n$$

Beweis. Wir wenden die Euler-Maclaurinsche Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} f(n) = \tfrac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n f(x)dx + \int_1^n \operatorname{saw}(x) f'(x)dx$$

auf die Funktion $f(x) = \log x$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \log(n!) &= \sum_{k=1}^{n} \log k = \tfrac{1}{2}\log n + \int_1^n \log x \, dx + \int_1^n \frac{\operatorname{saw}(x)}{x}\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\log n + n(\log n - 1) + 1 + \int_1^n \frac{\operatorname{saw}(x)}{x}\, dx. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Eponentialfunktion wird daraus

$$n! = \sqrt{n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\alpha_n},$$

wobei

$$\alpha_n = 1 + \int_1^n \frac{\operatorname{saw}(x)}{x}\, dx = 1 + \frac{B_2}{2}\cdot\frac{1}{x}\bigg|_1^n + \int_1^n \frac{\widetilde{B}_2(x)}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\, dx.$$

Die letzte Darstellung zeigt, dass der Limes

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 + \int_1^\infty \frac{\operatorname{saw}(x)}{x}\, dx$$

existiert. Wir haben also die asymptotische Beziehung

$$n! \sim \sqrt{n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\alpha}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $e^\alpha = \sqrt{2\pi}$. Dies sieht man wie folgt:
Division der asymptotischen Beziehungen

$$(2n)! \sim \sqrt{2n}\Big(\frac{2n}{e}\Big)^{2n} e^{\alpha} \qquad \text{und} \qquad (n!)^2 \sim n\Big(\frac{n}{e}\Big)^{2n} e^{2\alpha}$$

ergibt

$$\binom{2n}{n} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}\cdot 2^{2n} e^{-\alpha}.$$

Nun folgt mit Corollar A.7c), dass $e^\alpha = \sqrt{2\pi}$, q.e.d.

Für späteren Gebrauch merken wir noch an, dass wir hiermit bewiesen haben:

$$(2) \qquad 1 + \int_1^\infty \frac{\mathrm{saw}(x)}{x}\,dx = \log\sqrt{2\pi}.$$

Aus der klassischen Stirlingschen Formel lässt sich nun ihre Verallgemeinerung für die Gamma-Funktion ableiten.

A.9. Satz (Asymptotische Entwicklung der Gamma-Funktion). *Für jede ganze Zahl $r \geqslant 1$ and alle $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}$ gilt*

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z) \;&=\; (z-\tfrac{1}{2})\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{k=1}^{r} \frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{z^{2k-1}}\\ &\qquad - \int_0^\infty \frac{\widetilde{B}_{2r}(t)}{2r}\cdot\frac{dt}{(z+t)^{2r}}.\end{aligned}$$

Hier sind $\log\Gamma(z)$ und $\log z$ diejenigen Zweige des Logarithmus, die für positive reelle Argumente reelle Werte haben.

Beispiel. Für $r = 5$ lautet die Summe

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{z^{2k-1}} = \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \frac{1}{1188z^9}.$$

Beweis. Wir gehen aus von der Gaußschen Darstellung der Gamma-Funktion (Satz A.3.a) und erhalten

$$\log\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\Big(z\log n + \sum_{k=1}^{n}\log k - \sum_{k=0}^{n}\log(z+k)\Big).$$

Nach der Euler-Maclaurinschen Summenformel gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\log k \;&=\; \tfrac{1}{2}\log n + \int_1^n \log t\,dt + \int_1^n \frac{\mathrm{saw}(t)}{t}dt\\ &=\; \tfrac{1}{2}\log n + n\log n - n + 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{saw}(t)}{t}dt\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\log(z+k) \;&=\; \tfrac{1}{2}(\log z + \log(z+n)) + \int_0^n \log(z+t)dt + \int_0^n \frac{\mathrm{saw}(t)}{z+t}dt\\ &=\; \tfrac{1}{2}(\log z + \log(z+n)) + (z+n)\log(z+n) - z\log z - n\\ &\qquad + \int_0^n \frac{\mathrm{saw}(t)}{z+t}dt.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} z\log n \,+ \sum_{k=1}^{n}\log k - \sum_{k=0}^{n}\log(z+k) &= (z-\tfrac{1}{2})\log z - (z+n+\tfrac{1}{2})\log\Big(1+\frac{z}{n}\Big)+1 \\ &\quad + \int_1^n \frac{\operatorname{saw}(t)}{t}dt - \int_0^n \frac{\operatorname{saw}(t)}{z+t}dt. \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{n\to\infty}(z+n+\tfrac{1}{2})\log\Big(1+\frac{z}{n}\Big) = z$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\int_1^n \frac{\operatorname{saw}(t)}{t}dt\Big) = \log\sqrt{2\pi}, \qquad \text{siehe (2),}$$

erhalten wir

$$\log\Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\log z - z + \log\sqrt{2\pi} - \int_0^\infty \frac{\operatorname{saw}(t)}{z+t}dt.$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich nun durch mehrmalige partielle Integration von

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{saw}(t)}{z+t}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\operatorname{saw}(t)}{z+t}dt$$

wie beim Beweis der allgemeinen Euler-Maclaurinschen Summations-Formel unter Verwendung von

$$\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k\frac{1}{z+t} = (-1)^k\frac{k!}{(z+t)^{k+1}}.$$

Die Ausführung sei dem Leser überlassen.

Bei der Untersuchung der Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen benötigt man das Verhalten von $\log\Gamma(z)$ für $|\operatorname{Im}(z)|\to\infty$. Dazu ist der folgende Satz nützlich.

A.10. Satz. *Das Restglied aus Satz A.9 genügt für $r \geqslant 1$ und $y := |\operatorname{Im}(z)| > 0$ der Abschätzung*

$$\left|\int_0^\infty \frac{\widetilde{B}_{2r}(t)}{2r}\cdot\frac{dt}{(z+t)^{2r}}\right| \leqslant \frac{|B_{2r}|}{2r}\cdot\frac{\pi}{y^{2r-1}}.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $\operatorname{Im}(z) > 0$, also $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\int_0^\infty \frac{dt}{|z+t|^{2r}} \leqslant \frac{\pi}{y^{2r-1}}.$$

Dies sieht man so:

$$|z+t|^{2r} = |(x+t)+iy|^{2r} = \big((x+t)^2+y^2\big)^r,$$

also

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{|z+t|^{2r}} &= \int_0^\infty \frac{dt}{((x+t)^2+y^2)^r} = \int_x^\infty \frac{dt}{(t^2+y^2)^r} \\ &\leqslant \frac{1}{y^{2r}}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(1+(t/y)^2)^r} = \frac{1}{y^{2r-1}}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^r} \\ &\leqslant \frac{1}{y^{2r-1}}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{y^{2r-1}}, \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$