

5. Beweis des Primzahlsatzes

5.1. Satz (Ingham/Newman). *Sei*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine Dirichlet-Reihe mit $|a_n| \leq 1$ für alle n . Die dadurch in der Halbebene $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$ definierte holomorphe Funktion lasse sich in eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene $\{\operatorname{Re}(s) \geq 1\}$ fortsetzen. Dann konvergiert die Dirichlet-Reihe auch für $s = 1$ und es gilt

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n},$$

wobei hier $f(1)$ den Wert der fortgesetzten Funktion bezeichnet.

Beweis (D.J. Newman 1980). Wir führen zuerst eine Koordinaten-Transformation durch, die den Punkt $s = 1$ in den Nullpunkt transformiert. Sei

$$F(s) := f(1 + s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \quad \text{mit } b_n := \frac{a_n}{n}.$$

Die Funktion F ist in der rechten Halbebene $H(0) = \{\operatorname{Re}(s) > 0\}$ holomorph und lässt sich in eine offene Umgebung $U \supset \overline{H(0)}$ der abgeschlossenen Halbebene fortsetzen. Die fortgesetzte Funktion werde ebenfalls mit F bezeichnet. Es sei

$$F_N(s) := \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n^s}.$$

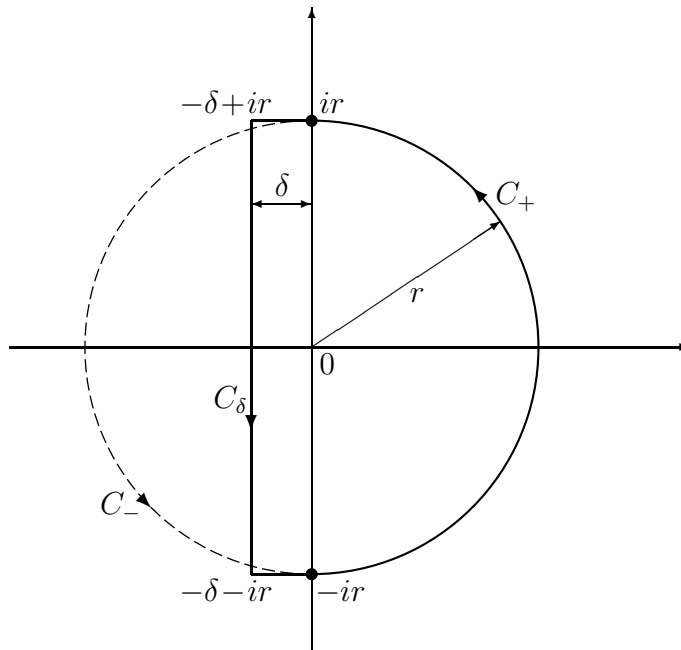
Die Behauptung des Satzes ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (F(0) - F_N(0)) = 0.$$

Die Funktion $F - F_N$ ist holomorph in $U \supset \overline{H(0)}$. Daher kann ihr Wert an der Stelle $s = 0$ mittels der Cauchyschen Integralformel

$$F(0) - F_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s)) \frac{1}{s} ds$$

berechnet werden. Hier ist $C := C_+ + C_\delta$ folgende Kurve in U , vgl. Figur 1: C_+ ist der Halbkreis mit Radius $r > 0$ in der rechten Halbebene von $-ir$ nach $+ir$ und C_δ ist der Polygonzug von ir über $-\delta + ir$ und $-\delta - ir$ nach $-ir$. Dabei ist die Konstante $\delta > 0$ in Abhängigkeit von r so klein zu wählen, dass die Kurve C und ihr Inneres ganz in U liegen.



Figur 5.1

Die Funktion $s \mapsto (F(s) - F_N(s))N^s$ ist ebenfalls holomorph in U und ihr Wert an der Stelle $s = 0$ ist gleich $F(0) - F_N(0)$. Daher haben wir

$$F(0) - F_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s)) N^s \frac{1}{s} ds$$

Mit einem Trick von Newman kann man auch schreiben

$$(*) \quad F(0) - F_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s)) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) ds.$$

Dies ist richtig, da die hinzugefügte Funktion

$$s \mapsto (F(s) - F_N(s)) N^s \frac{s}{r^2}$$

in U holomorph ist und daher ihr Integral über C verschwindet.

Zur späteren Verwendung bemerken wir noch, dass für $|s| = r$ gilt

$$\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) = \frac{\bar{s}}{s\bar{s}} + \frac{s}{r^2} = \frac{s + \bar{s}}{r^2} = \frac{2\sigma}{r^2}, \quad \text{wobei } \sigma = \text{Re}(s).$$

Zum Beweis des Satzes müssen wir nun das Integral $(*)$ abschätzen.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $r := 4/\varepsilon$ und dazu ein geeignetes $\delta > 0$. Die Integralabschätzung erfolgt nun in drei Schritten.

1) Abschätzung des Integrals über die Kurve C_+ .

Da die Dirichlet-Reihe F für $\operatorname{Re}(s) > 0$ konvergiert, ist

$$F(s) - F_N(s) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}.$$

Dies können wir wie folgt abschätzen

$$|F(s) - F_N(s)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}} \leq \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = \frac{N^{-\sigma}}{\sigma}.$$

Für den Integranden

$$G_1(s) := (F(s) - F_N(s))N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right)$$

gilt deshalb auf C_+

$$|G_1(s)| \leq \frac{N^{-\sigma}}{\sigma} N^\sigma \frac{2\sigma}{r^2} = \frac{2}{r^2}$$

also

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} G_1(s) ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} \frac{2}{r^2} |ds| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{r^2} \cdot \pi r = \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

2) Abschätzung des Integrals $\int_{C_\delta} F_N(s) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) ds$.

Da die Funktion F_N in der ganzen Ebene holomorph ist, können wir den Integrationsweg C_δ durch den Halbkreis C_- vom Radius r in der linken Halbebene von ir nach $-ir$ ersetzen.

Behauptung. Die Funktion F_N genügt in der linken Halbebene $\sigma = \operatorname{Re}(s) < 0$ der Abschätzung

$$|F_N(s)| \leq N^{-\sigma} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{|\sigma|} \right)$$

Beweis hierfür. Es ist

$$|F_N(s)| \leq \sum_{n=1}^N \frac{|b_n|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1+\sigma}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1-\alpha}} \quad \text{mit } \alpha := -\sigma = |\sigma|$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

i) Es sei $0 < \alpha < 1$. Da $x \mapsto 1/x^{1-\alpha}$ monoton fällt, gilt

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^{1-\alpha}} = 1 + \frac{1}{\alpha} (N^\alpha - 1) \leq \frac{N^\alpha}{\alpha} \leq N^\alpha \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

ii) Falls $\alpha \geq 1$, ist $x \mapsto 1/x^{1-\alpha}$ (schwach) monoton wachsend, also

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq N^{\alpha-1} + \int_1^N x^{\alpha-1} dx = N^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}(N^\alpha - 1) \leq N^\alpha \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es folgt für den Integranden

$$G_2(s) := F_N(s) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right)$$

auf C_- die Abschätzung

$$|G_2(s)| \leq |F_N(s) N^s| \frac{2|\sigma|}{r^2} \leq \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{|\sigma|} \right) \frac{2|\sigma|}{r^2} \leq 2 \left(\frac{1}{Nr} + \frac{1}{r^2} \right),$$

also

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} G_2(s) ds \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{C_-} \left(\frac{1}{Nr} + \frac{1}{r^2} \right) |ds| \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{r} \leq \frac{2}{r} = \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $N \geq r$.

3) Abschätzung des Integrals $\int_{C_\delta} F(s) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) ds$.

Die Funktion

$$s \mapsto G_3(s) := F(s) \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right)$$

ist holomorph in einer Umgebung der Kurve C_δ . Deshalb gibt es eine Konstante $K > 0$, so dass

$$|G_3(s)| \leq K \quad \text{für alle } s \in C_\delta.$$

Daher genügt der Integrand

$$F(s) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) = G_3(s) N^s$$

auf C_δ der Abschätzung

$$|G_3(s) N^s| \leq K N^\sigma.$$

Für $N \rightarrow \infty$ konvergiert $K N^\sigma$ auf der Kurve C_δ mit Ausnahme der Endpunkte wegen $\sigma = \operatorname{Re}(s) < 0$ monoton fallend gegen 0. Aus dem Satz über monotone Konvergenz

von Integralen folgt nun

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_{C_\delta} G_3(s) N^s ds \right| = 0;$$

es gibt deshalb eine natürliche Zahl N_0 , die wir $\geq r$ annehmen können, so dass

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} G_3(s) N^s ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } N \geq N_0.$$

Durch Zusammenfassung der Abschätzungen unter 1), 2) und 3) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} |F(0) - F_N(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s)) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right) ds \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \end{aligned}$$

für alle $N \geq N_0$, q.e.d.

5.2. Corollar. Die unendliche Reihe $\sum \mu(n)/n$ konvergiert und hat den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Beweis. Dies folgt durch Anwendung von Satz 5.1 auf die Funktion

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Da $\zeta(s)$ keine Nullstellen mit $\operatorname{Re}(s) = 1$ hat, ist $1/\zeta$ in einer Umgebung der abgeschlossenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq 1\}$ holomorph. Da ζ bei $s = 1$ einen Pol hat, gilt $(1/\zeta)(1) = 0$.

Aufgrund der Sätze 4.6 und 4.8 folgt nun der zuerst 1896 von Jacques Hadamard und Charles de la Vallée Poussin bewiesene

5.3. Satz (Primzahlsatz).

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Bemerkung. Der *Integral-Logarithmus* ist für reelles $x > 2$ definiert durch

$$\operatorname{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Durch partielle Integration zeigt man

$$\operatorname{li}(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), \quad \text{also} \quad \operatorname{li}(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Deshalb lässt sich der Primzahlsatz auch formulieren als

$$\pi(x) \sim \operatorname{li}(x).$$

5.4. Satz. *Es bezeichne $(p_n)_{n \geq 1}$ die Folge aller, der Größe nach geordneten Primzahlen. Dann gilt die asymptotische Beziehung*

$$p_n \sim n \log n.$$

Beweis. Es ist zu zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1.$$

Annahme, dies sei nicht der Fall. Dann tritt eine der folgenden beiden Möglichkeiten ein.

$$1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n \log n} > 1.$$

In diesem Fall gibt es ein $\varepsilon > 0$ und beliebig große n mit

$$p_n \geq (1 + \varepsilon)n \log n.$$

Für diese n gilt dann

$$\pi((1 + \varepsilon)n \log n) \leq n.$$

Es würde folgen

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi((1 + \varepsilon)n \log n)}{n} \leq 1.$$

Nach dem folgenden Hilfssatz 5.5 ist dieser Limes aber gleich $1 + \varepsilon$, Widerspruch!

$$2) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n \log n} < 1.$$

In diesem Fall gibt es ein $\varepsilon > 0$ und beliebig große n mit

$$p_n \leq (1 - \varepsilon)n \log n.$$

Für diese n gilt dann

$$\pi((1 - \varepsilon)n \log n) \geq n.$$

Es würde folgen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi((1 - \varepsilon)n \log n)}{n} \geq 1,$$

was ebenfalls im Widerspruch zu Hilfssatz 5.5 steht.

5.5. Hilfssatz. *Sei $\lambda > 0$. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(\lambda n \log n)}{n} = \lambda.$$

Beweis. Nach dem Primzahlsatz ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(\lambda n \log n)}{\lambda n} \cdot \frac{\log(\lambda n \log n)}{\log n} = 1.$$

Andrerseits ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\lambda n \log n)}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\log \lambda + \log \log n}{\log n} \right) = 1.$$

Daraus folgt die Behauptung.

5.6. Satz. *Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $x_0 = x_0(\varepsilon)$, so dass für jedes $x \geq x_0$ im Intervall $[x, x(1 + \varepsilon)]$ mindestens eine Primzahl liegt.*

Beweis. Nach dem Primzahlsatz gilt

$$\pi(x) < \pi(x(1 + \varepsilon)) \quad \text{für } x \geq x_0.$$

Man kann sogar genauer zeigen

$$\pi(x(1 + \varepsilon)) - \pi(x) \sim \frac{\varepsilon x}{\log x}.$$

Der Beweis dieser Aussage sei dem Leser als Übung überlassen.