9. Die Lindelöfsche Vermutung

9.1. Die *Lindelöfsche μ-Funktion* ist definiert durch

$$\mu_{\mathrm{Li}}(\sigma) := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \ : \ |\zeta(\sigma + it)| = \mathcal{O}(t^\alpha) \text{ für } t \to \infty\}.$$

Für $\sigma > 1$ gilt $|\zeta(\sigma + it)| \leq \zeta(\sigma)$, also $\mu_{\mathrm{Li}}(\sigma) = 0$.

Die *Lindelöfsche Vermutung* besagt

$$\mu_{\mathrm{Li}}(\sigma) = 0 \qquad \text{für alle } \sigma > \frac{1}{2}.$$

Das bedeutet: Für jedes $\sigma > \frac{1}{2}$ und jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$|\zeta(\sigma + it)| = \mathcal{O}(t^\epsilon).$$

Wir werden beweisen, dass aus der Riemannschen Vermutung die Lindelöfsche Vermutung folgt.

Dazu werden zwei funktionentheoretische Sätze benötigt, der Satz von Borel und Carathéodory sowie der Hadamardsche Dreikreisesatz.

9.2. Satz (Borel/Carathéodory). *Sei*

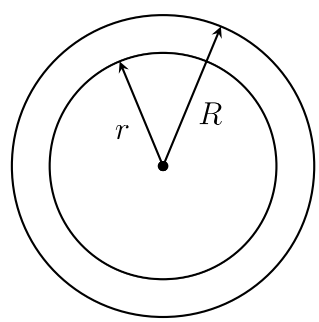
$$f : \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R\} \to \mathbb{C}$$

holomorph. Es gelte

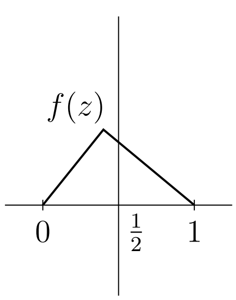
$$\sup\{\mathrm{Re}\, f(z) \ : \ |z| < R\} \leq M < \infty.$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r < R$

$$|f(z)| \leq 2M \frac{r}{R - r} + |f(0)| \frac{R + r}{R - r}.$$



Beweis (Landau). *1. Schritt.* Beweis im Spezialfall $M = \frac{1}{2}$, $R = 1$, $f(0) = 0$.



Hier gilt (vgl. Skizze) $|f(z)| \leq |1 - f(z)|$, also $\left|\frac{f(z)}{1 - f(z)}\right| \leq 1$. Wir setzen

$$g(z) := \frac{f(z)}{1 - f(z)}.$$

Dann ist $g(0) = 0$, und aus dem Schwarzschen Lemma folgt $|g(z)| \leq |z|$ für alle $|z| < 1$.

[0]Mitschrift von Andreas Wadhwa. Letzte Änderung: 2009-11-11

Wegen

$$f(z) = \frac{g(z)}{1 + g(z)}$$

folgt daraus $|f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}$ und damit die Behauptung.

2. Schritt. M, R beliebig, $f(0) = 0$. Das eben Gezeigte angewendet auf die für $|z| < 1$ definierte Funktion $f(Rz)/(2M)$ ergibt $f(Rz) \leq 2M|z|/(1 - |z|)$ für $|z| < 1$, was mit der Substitution $Rz \to z$ zu $f(z) \leq 2M|z|/(R - |z|)$ für $|z| < R$ wird.

3. Schritt. Im allgemeinen Fall setzt man $g(z) := f(z) - f(0)$, dann ist

$$M' := \sup_{|z|<R} \operatorname{Re} g(z) \leq \sup_{|z|<R} \operatorname{Re} f(z) + |f(0)| \leq M + |f(0)|.$$

Auf $g(z)$ darf nach dem 2. Schritt der Satz bereits angewendet werden, und hieraus folgt mit $2r \leq R + r$ die Behauptung. □

9.3. *Anwendung* auf die Zetafunktion. Für $\frac{1}{2} \leq \vartheta < 1$ sei $\mathrm{RV}(\vartheta)$ die folgende Aussage:

$$\mathrm{RV}(\vartheta): \qquad \zeta(s) \text{ hat keine Nullstellen mit } \operatorname{Re} s > \vartheta.$$

Es ist also $\mathrm{RV}(\frac{1}{2})$ die klassische Riemannsche Vermutung.

Aus $\mathrm{RV}(\vartheta)$ folgt, dass ein eindeutiger Zweig von $\log \zeta(s)$ existiert in

$$G_\vartheta := \{s \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re}(s) > \vartheta\} \setminus \{\sigma \in \mathbb{R} \,:\, \sigma \leq 1\},$$

der reell ist für positive reelle Werte von s. (Hier beachte man, dass G_ϑ einfach zusammenhängend ist.)

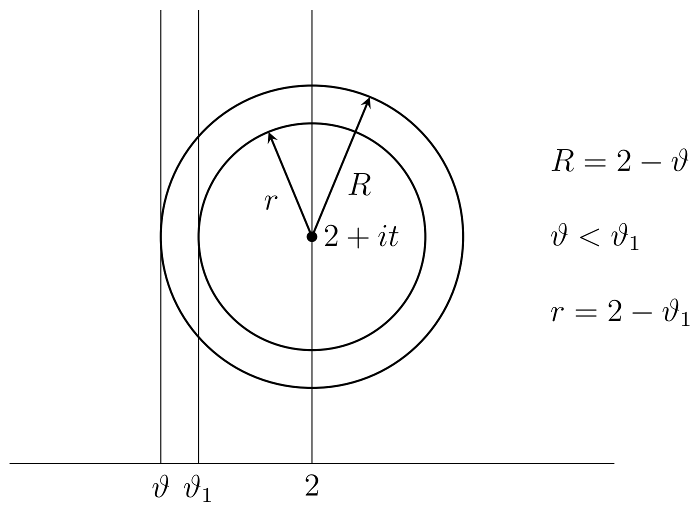
Da $\zeta(s) = \mathcal{O}(|t|)$ für $|t| \to \infty$ gleichmäßig für $\operatorname{Re} s \geq \delta > 0$ gilt[1], folgt $\log |\zeta(s)| = \mathcal{O}(\log |t|)$. Es gibt also ein t_0 und eine absolute Konstante C mit $\log |\zeta(s)| \leq C \log t$ für alle $t \geq t_0$.

Es gelte $\mathrm{RV}(\vartheta)$. Für $s \in G_\vartheta$, $t \geq t_0$ gilt dann

$$\operatorname{Re} \log \zeta(s) = \log |\zeta(s)| \leq C \log t.$$

Wir wollen nun den Satz von Borel und Carathéodory auf die Kreise

[1] Dies folgt wie schon an früherer Stelle aus der für $\operatorname{Re} s > 0$ gültigen Formel $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^{1+s}}\, du$.



anwenden. Dazu benötigen wir noch eine Abschätzung von $\log\zeta$ am gemeinsamen Mittelpunkt der beiden Kreise.

Hilfssatz. *Für alle* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ *gilt*

$$|\log\zeta(s)| \le \log\zeta(\sigma).$$

Beweis. Für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt

$$\log\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s}, \qquad \Lambda_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & n = p^m \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases}$$

also

$$|\log\zeta(s)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{|n^s|} = \log\zeta(\sigma). \qquad \square$$

Die Anwendung des Satzes von Borel und Carathéodory ergibt nun

$$\sup_{|s-(2+it)|\le r} |\log\zeta(s)| \le 2C\log(t+2)\frac{R}{R-r} + \frac{R+r}{R-r}\log\zeta(2)$$

für alle $t \ge t_0$.

Damit ist bewiesen:

Satz. *Es gelte* $\mathrm{RV}(\vartheta)$. *Dann gibt es ein* t_0, *so dass für alle* $\vartheta_1 > \vartheta$

$$|\log\zeta(s)| = \mathcal{O}(\log|t|)$$

gleichmäßig für $\operatorname{Re} s = \sigma \ge \vartheta_1$, $|t| \ge t_0$ *gilt.* $\square$

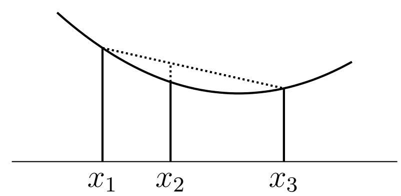
9.4. Hadamardscher Dreikreisesatz. *Sei* $f \not\equiv 0$ *holomorph im Kreisring* $\{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < R\}$, *und sei*

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|, \qquad \rho < r < R.$$

Dann ist $\log M(r)$ *eine konvexe Funktion von* $\log r$.

Bemerkung. Eine auf dem Intervall $]a, b[$ reelle Funktion F ist genau dann konvex, wenn für alle $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ gilt:

$$F(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F(x_3).$$



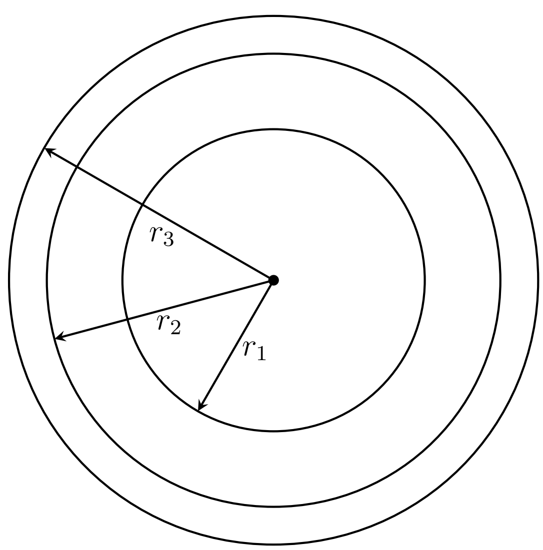
Damit besagt der Hadamardsche Dreikreisesatz, dass

$$\frac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)} \log M(r_1) + \frac{\log(r_2/r_1)}{\log(r_3/r_1)} \log M(r_3),$$

d.h.

$$\boxed{M(r_2) \le M(r_1)^\lambda M(r_3)^{1-\lambda} \quad \text{mit } \lambda = \tfrac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)}}$$

für alle $\rho < r_1 < r_2 < r_3 < R$ gilt.



Beweis des Hadamardschen Dreikreisesatzes. Seien $\rho < r_1 < r_2 < r_3 < R$. Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{M(r_3)}{M(r_1)} = \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^\alpha,$$

d.h.

$$M(r_3)r_3^{-\alpha} = M(r_1)r_1^{-\alpha} =: M_0.$$

Definiere die reelle Funktion (vom komplexen Argument)

$$H(z) := |f(z)| \cdot |z|^{-\alpha}.$$

Dann ist

$$\sup_{|z|=r_3} H(z) = M_0 = \sup_{|z|=r_1} H(z).$$

Nun ist H lokal der Betrag einer holomorphen Funktion. Also gilt für H das Maximum-Prinzip, insbesondere

$$\sup_{|z|=r_2} H(z) \le M_0,$$

also

$$M(r_2)r_2^{-\alpha} \le M_0 = M_0^\lambda M_0^{1-\lambda} = M(r_1)^\lambda r_1^{-\alpha\lambda} M(r_3)^{1-\lambda} r_3^{-\alpha(1-\lambda)}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Für

$$\lambda = \frac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)}$$

gilt $r_2 = r_1^\lambda r_3^{1-\lambda}$, und dies eingesetzt ergibt die Behauptung. $\square$

9.5. Satz. *Es gelte* RV(ϑ). *Dann gilt für jedes* $\vartheta_1 > \vartheta$ *und jedes* $\epsilon > 0$

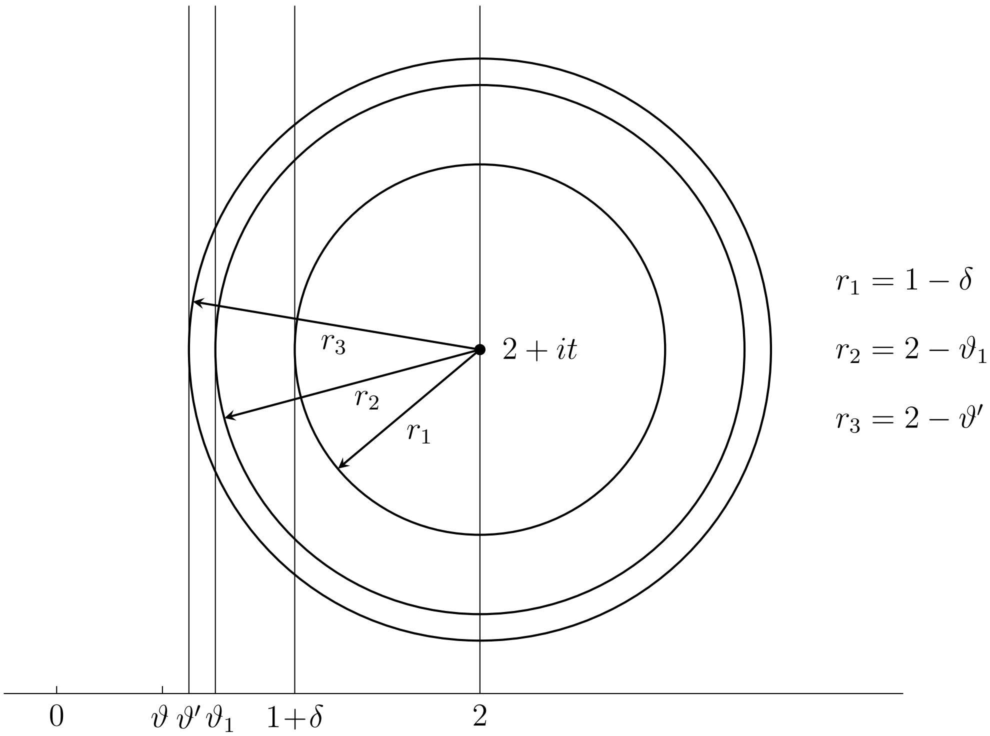
$$|\zeta(s)| = \mathcal{O}(|t|^\epsilon),$$

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \mathcal{O}(|t|^\epsilon)$$

für $|t| \ge t_0$ *gleichmäßig in* $\operatorname{Re} s \ge \vartheta_1$.

Hieraus ergibt sich also insbesondere, dass die Lindelöfsche Vermutung aus der Riemannschen Vermutung folgt.

Beweis. Es sei noch $\vartheta < \vartheta' < \vartheta_1$ und $0 < \delta < 1$. Wir wenden den Dreikreisesatz auf $\log\zeta(s)$ und die Kreise



(Skizze nicht notwendig maßstabsgetreu) an. Dazu setzen wir

$$M_t(r) := \sup_{|s-(2+it)|} |\log\zeta(s)|.$$

Nach Hilfssatz und Satz in (9.3.) gibt es ein t_1 und Konstanten A_1, A_2 mit $M_t(r_1) \le A_1$ und $M_t(r_3) \le A_2 \log t$ für $t \ge t_1$. Nach dem Dreikreisesatz ist also

$$M_t(r_2) \le (A_2|\log t|)^{1-\lambda} A_1^{\lambda} \le A_3(\log t)^{\beta} \quad \text{mit } \beta < 1$$

für $t \ge t_2$ (t_2 geeignet) und eine weitere Konstante A_3. Mit dem Maximum-Prinzip folgt

$$|\log\zeta(s)| = \mathcal{O}\big((\log t)^{\beta}\big) \quad (\beta < 1) \quad \text{gleichmäßig in } \operatorname{Re} s \ge \vartheta_1.$$

Es gibt also eine Konstante C und ein t_0 mit

$$|\zeta(s)| \le e^{C(\log t)^{\beta}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{|\zeta(s)|} \le e^{C(\log t)^{\beta}}$$

für $t \ge t_0$. Wegen $\lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^{\beta}}{\log t} = 0$ ist

$$e^{C(\log t)^{\beta}} = \mathcal{O}(t^{\epsilon})$$

für beliebig vorgegebenes $\epsilon > 0$, woraus die Behauptung folgt. □