6. Die Gamma-Funktion

6.1. Die *Gamma-Funktion* ist für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ definiert durch

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \qquad (\textit{Euler-Integral}).$$

Bemerkung. Es ist $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t}$ mit $x = \operatorname{Re} z$. Bekanntlich konvergiert $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ für $x > 0$ (das ist die reelle Gamma-Funktion). Es folgt

$$|\Gamma(z)| \le \Gamma(\operatorname{Re} z)$$

für alle z mit $\operatorname{Re} z > 0$.

Durch partielle Integration beweist man die Funktionalgleichung

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Da $\Gamma(1) = 1$, folgt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{für alle } n \ge 1 \text{ ganz.}$$

Aus der Funktionalgleichung folgt

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \ldots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Dies ist zunächst richtig für $\operatorname{Re} z > 0$. Die rechte Seite stellt eine meromorphe Funktion in der Halbebene

$$H(-n-1) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z > -n-1\}$$

dar mit Polen erster Ordnung an den Stellen $z = 0, -1, -2, \ldots, -n$. Dadruch wird die Gamma-Funktion in die ganze komplexe Ebene als meromorphe Funktion fortgesetzt mit Polstellen an den Stellen $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \le 0$.

6.2. Satz (axiomatische Charakterisierung der Gamma-Funktion). *Sei F eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften*

(i) *F ist holomorph in $\{\operatorname{Re} z > 0\}$;*

(ii) *F genügt der Funktionalgleichung*

$$zF(z) = F(z+1) \quad \textit{für alle } z;$$

(iii) *$|F(z)|$ ist beschränkt im Streifen $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \le \operatorname{Re} z \le 2\}$.*

Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit

$$F(z) = c\,\Gamma(z) \qquad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

[0]Mitschrift von Andreas Wadhwa. Letzte Änderung: 2009-11-11

Bemerkung. $c = F(1)$.

Beweis. Setze $c := F(1)$ und

$$\Phi(z) := F(z) - c\Gamma(z).$$

Φ erfüllt (i), (ii), (iii) und $\Phi(1) = 0$. Zudem ist $\Phi(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z}$ holomoph bei $z = 0$. Also ist Φ beschränkt in $\{0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$. Die Funktion

$$\Psi(z) := \Phi(z)\Phi(1-z)$$

ist dann ebenfalls beschränkt in $\{0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\Psi(z+1) &= \Phi(z+1)\,\Phi(-z)\\ &= z\,\Phi(z)\,\Phi(-z)\\ &= -\Phi(z)\,\Phi(1-z)\\ &= -\Psi(z),\end{aligned}$$

also ist Ψ periodisch mit Periode 2 und beschränkt. Nach dem Satz von Liouville muss Ψ konstant sein. Da $\Psi(1) = 0$, folgt, dass Ψ identisch gleich 0 ist. Also ist $\Phi(z) = 0$ und die Behauptung folgt. □

6.3. Satz.

(i) *Für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{n \in \mathbb{Z},\, n \le 0\}$ gilt*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \qquad \textit{(Gauß)},$$

(ii) $$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-\frac{z}{n}}.$$

Dabei ist γ die Euler-Mascheroni-Konstante.

Beweis. 1. Schritt. Wir zeigen, dass das unendliche Produkt in (ii) normal in $\mathbb{C}$ konvergiert. Mit

$$\begin{aligned}E(z) :=&(1-z)e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\\ &\qquad - z - z^2 - \frac{z^3}{2} - \frac{z^4}{3!} - \dots\\ =&1 - \frac{z^2}{2} + \text{höhere Glieder}\end{aligned}$$

ist $|E(z)-1| \le |z|^2$ für $|z| \le r_0$ und ein gewisses $r_0 > 0$ (man kann z.B. $r_0 = \frac{1}{2}$ setzen). Es folgt

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} = 1 + f_n(z),$$

wobei

$$|f_n(z)| \le \frac{|z|^2}{n^2} \quad \text{für } n \ge \frac{|z|}{r_0}.$$

Dies impliziert die normale Konvergenz. Also ist

$$G(z) := ze^{\gamma z}\prod_{n\ge 1}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

holomorph in $\mathbb{C}$ mit Nullstellen erster Ordnung an den Stellen $z=-n$, $n \ge 0$.

2. Schritt. Mit

$$F_n(z) := \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \qquad G_n(z) := ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$$

gilt

$$\begin{aligned} F_n(z)\,G_n(z) &= \frac{1}{1+z}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\cdots\frac{1}{1+\frac{z}{n}}\cdot e^{z\log n}\cdot e^{\gamma z}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\cdot e^{-\sum_1^n \frac{z}{k}} \\ &= \exp\Big[z\underbrace{\Big(\log n + \gamma - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}\Big] \longrightarrow 1 \quad \text{für } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $F_n(z)$ für alle $z \ne -n$, $n \ge 0$ gegen $\frac{1}{G(z)} =: F(z)$ konvergiert.

3. Schritt. Es bleibt zu zeigen: $F(z) = \Gamma(z)$. Dazu wird die axiomatische Charakterisierung der Gamma-Funktion benutzt.

Klar ist F holomorph in $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. Zudem ist

$$F_n(z+1) = \frac{n!\,n^{z+1}}{(z+1)\cdots(z+n+1)}, \quad \frac{F_n(z+1)}{F_n(z)} = \frac{nz}{(z+n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z,$$

also $F(z+1) = zF(z)$. Schließlich ist

$$|F_n(z)| \le \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \longrightarrow F(x) = \frac{1}{G(x)},$$

was wegen der Stetigkeit und des Nichtverschwindens von G auf $1 \le x \le 2$ impliziert, dass $F(z) = \lim F_n(z)$ beschränkt bleibt für $1 \le x \le 2$.

Mit $F(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ folgt also $F(z) = \Gamma(z)$. □

6.4. Satz (Produkt-Darstellung des Sinus). *Es gilt*

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi},$$

$$\text{(ii)}\quad \sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

Bemerkung. Das Produkt in (ii) konvergiert normal.

Beweis. (i) $\Phi(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit Polen erster Ordnung an den Stellen $z = n \in \mathbb{Z}$. Es ist

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z}, \qquad \Gamma(1-z) = \frac{\Gamma(2-z)}{1-z}.$$

Sei

$$S_1 := \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 \le \operatorname{Re} z \le 1 \text{ und } |\operatorname{Im} z| \ge 1\}.$$

Dann ist $\Phi(z)$ beschränkt in S_1.

Sei weiter

$$\Psi(z) := \sin(\pi z)\,\Phi(z) = \sin(\pi z)\,\Gamma(z)\,\Gamma(1-z).$$

Da $\sin \pi z$ an den Stellen $z = n \in \mathbb{Z}$ Nullstellen erster Ordnung hat, ist $\Psi(z)$ überall holomorph.

Es gilt

$$\Phi(z+1) = -\Phi(z), \qquad \sin \pi(z+1) = -\sin \pi z,$$

also $\Psi(z+1) = \Psi(z)$.

Wegen der Beschränktheit von Φ in S_1 folgt

$$(*)\quad |\Psi(z)| \le C\, e^{\pi|z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

mit einer gewissen Konstanten $C > 0$.

Da $\Psi(z)$ überall von 0 verschieden ist, gilt $\Psi(z) = e^{g(z)}$ mit einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Nach einem Satz aus der Theorie der ganzen Funktionen folgt aus $(*)$, dass $g(z) = a + bz$ mit Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$. Wegen $\Psi(z) = \Psi(-z)$ ist $b = 0$, d.h. $\Psi(z)$ ist konstant. Mit

$$\Psi(z) = \frac{\sin \pi z}{z}\,\Gamma(1+z)\,\Gamma(1-z)$$

erhält man $\Psi(0) = \pi$, also

$$\pi = \sin \pi z \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z).$$

Dies zeigt (i).

(ii) Aus

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n \geq 1} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{-\frac{z}{n}}$$

und

$$\Gamma(1-z) = (-z)\Gamma(-z)$$

folgt

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{z}(-z) e^{-\gamma z} \prod_{n \geq 1} \Big(1 - \frac{z}{n}\Big) e^{\frac{z}{n}}.$$

Dies zeigt (ii). □

6.5. Corollar.

(i) $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}$,

(ii) $$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \qquad \text{(Wallis-Produkt).}$$

6.6. Satz (Partialbruch-Entwicklung des Cotangens). Es gilt

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\Big).$$

Beweis durch logarithmisches Differenzieren des Sinus-Produkts. □

6.7. Satz *Für $|z| < 1$ gilt*

$$(\dagger) \qquad \boxed{\pi z \, \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) \, z^{2k}}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\pi z \, \cot \pi z &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - n^2} \\
&= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \\
&= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}} \\
&= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}.
\end{aligned}$$

□

6.8. Die *Bernoulli-Zahlen* B_n sind definiert durch

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Die Funktion auf der linken Seite ist bei 0 holomorph und hat Singularitäten genau an den Stellen $z = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Daher ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich 2π.

Da

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

folgt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} z^l \right) = 1.$$

Das Cauchy-Produkt der linken Seite ist $\sum c_n z^n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! \, (n-k+1)!} \, B_k = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k.$$

Es folgt $c_0 = B_0 = 1$ und $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$ für $n \geq 1$.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
n = 1: &\quad B_0 + 2B_1 = 0 \quad \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2},\\
n = 2: &\quad B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0 \quad \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6},\\
&\vdots\\
n: &\quad B_0 + (n+1)B_1 + \binom{n+1}{2} B_2 + \ldots + \binom{n+1}{n} B_n = 0.
\end{aligned}$$

Damit kann man rekursiv alle Bernoulli-Zahlen berechnen. Die ersten von 0 verschiedenen Bernoulli-Zahlen sind:

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	...
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{6}{7}$	...

6.9. Cotangens und Bernoulli-Zahlen. Aus

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1}$$

ergibt sich

$$z \cot z = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1},$$

also

$$(\ddagger) \qquad \boxed{z \cot z = iz + \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{B_n}{n!} (2iz)^n}.$$

Da $z \mapsto z \cot z$ eine gerade Funktion ist, folgt $B_1 = -\frac{1}{2}$ und $B_{2k+1} = 0$ für alle $k \geq 1$.

Aus $(\ddagger)$ folgt nach Substitution $z \to \pi z$

$$\pi z \cot \pi z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2\pi)^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}.$$

Ein Vergleich mit $(\dagger)$ liefert

$$\boxed{\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \tfrac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}}.$$

Einerseits folgt hieraus

$$\operatorname{sign}(B_{2k}) = (-1)^{k-1} \quad \text{für } k \geq 1,$$

andrerseits lassen sich so die Werte $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \ldots$ berechnen.

6.10. Satz. *Es gilt*

$$\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{z+1}{2}\Big) = 2^{1-z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(z).$$

Beweis mit der axiomatischen Charakterisierung der Gamma-Funktion. Setze

$$F(z) := 2^z\,\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

F ist holomorph in $H(0)$ und beschränkt für $1 \le \operatorname{Re} z \le 2$. Außerdem gilt

$$F(z+1) = 2\cdot 2^z\,\Gamma\Big(\frac{z+1}{2}\Big)\,\underbrace{\Gamma\Big(\frac{z}{2}+1\Big)}_{=\frac{z}{2}\Gamma(\frac{z}{2})} = z\,F(z).$$

Es folgt $F(z) = c\,\Gamma(z)$ mit $c = F(1) = 2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 2\cdot\sqrt{\pi}\cdot 1$. Dies zeigt die Behauptung. □