10. Äquivalenzen zur Riemannschen Vermutung

10.1. Satz. *Sei* $\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1$. *Folgende Aussagen sind gleichbedeutend:*

(i) *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\theta+\varepsilon})$$

(ii) *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$\vartheta(x) = x + O(x^{\theta+\varepsilon})$$

(iii) *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$\psi(x) = x + O(x^{\theta+\varepsilon})$$

(iv) *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$M(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$$

(v) RH(θ): *Die Riemannsche Zetafunktion* $\zeta(s)$ *hat keine Nullstellen mit* $\mathrm{Re}(s) > \theta$.

Beweis.
Die Äquivalenz (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) folgt aus der früher bewiesenen Tatsache, dass

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2}).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}\mathrm{li}(x) &= \int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{u}{\log u}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u}\\ &= \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + O(1).\end{aligned}$$

Wir setzen $\vartheta(x) = x + R(x)$. Nach Voraussetzung ist $R(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Mit Abelscher partieller Summation ergibt sich

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{p\leqslant x} 1 = \sum_{p\leqslant x} \frac{\log p}{\log p}\\ &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(u)}{u\log^2 u} du\\ &= \underbrace{\frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u}}_{\mathrm{li}(x)+O(1)} + \underbrace{\frac{R(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{R(u)}{u\log^2 u} du}_{O(x^{\theta+\varepsilon})}.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{\mathrm{li}(u)}{u}du &= \mathrm{li}(u)\log u\Big|_2^x - \int_2^x \frac{\log u}{\log u}du \\ &= \mathrm{li}(x)\log x - x + O(1).\end{aligned}$$

Wir setzen $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + r(x)$. Nach Voraussetzung ist $r(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Mit Abelscher partieller Summation ergibt sich

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &= \sum_{p\leqslant x}\log p = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(u)}{u}du \\ &= \underbrace{\mathrm{li}(x)\log x - \int_2^x \frac{\mathrm{li}(u)}{u}du}_{x+O(1)} + \underbrace{r(x)\log x - \int_2^x \frac{r(u)}{u}du}_{O(x^{\theta+\varepsilon'})}.\end{aligned}$$

für jedes $\varepsilon' > \varepsilon$. Daraus folgt die Behauptung.

(iii) $\Rightarrow$ (v). Wir betrachten die Funktion

$$F(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$$

Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ besitzt $F(s)$ eine Darstellung als Dirichlet-Reihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)-1}{n^s} =: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}.$$

mit

$$A(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n = \sum_{n\leqslant x}(\Lambda(n)-1) = \psi(x) - \lfloor x\rfloor.$$

Nach Voraussetzung gilt $A(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Mit Abelscher partieller Summation ergibt sich

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n^s} = \frac{A(x)}{x^s} + s\int_1^x \frac{A(u)}{u^{s+1}}du.$$

Für $\mathrm{Re}(s) > \theta$ konvergiert die rechte Seite aufgrund der Abschätzung von $A(x)$ für $x \to \infty$ und man erhält

$$F(s) = s\int_1^{\infty}\frac{A(x)}{x^{s+1}}dx \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > \theta,$$

d.h. $\zeta'(s)/\zeta(s) + \zeta(s) = -F(s)$ ist holomorph für $\mathrm{Re}(s) > \theta$, insbesondere kann $\zeta(s)$ dort keine Nullstellen haben.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Diese Implikation wird analog zur Implikation (iii) $\Rightarrow$ (v) bewiesen, die Ausführung ist sogar etwas einfacher.
Wir betrachten die Funktion $G(s) := 1/\zeta(s)$; sie besitzt für $\mathrm{Re}(s) > 1$ eine Darstellung als Dirichlet-Reihe

$$G(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Die Partialsummen der Koeffizienten sind

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n).$$

Nach Voraussetzung gilt $M(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Mit Abelscher partieller Summation ergibt sich

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{M(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{M(u)}{u^{s+1}} du.$$

Für $\mathrm{Re}(s) > \theta$ konvergiert die rechte Seite aufgrund der Abschätzung von $M(x)$ für $x \to \infty$ und man erhält

$$G(s) = s \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^{s+1}} dx \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > \theta,$$

d.h. $1/\zeta(s) = G(s)$ ist holomorph für $\mathrm{Re}(s) > \theta$, insbesondere kann $\zeta(s)$ dort keine Nullstellen haben.

Es fehlen noch die Beweise der Implikationen (v) $\Rightarrow$ (iii) und (v) $\Rightarrow$ (iv). Dazu verwenden wir Satz 8.10.
...