9. Abschätzungen in vertikaler Richtung

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit dem Wachstums-Verhalten der Zetafunktion und verwandter Funktionen für $\mathrm{Im}(s) \to \infty$.

9.1. Satz. *Sei $s = \sigma + it$ und $\sigma > 1$. Dann gilt*

a) $|\zeta(s)| \leqslant \zeta(\sigma)$,

b) $\left|\dfrac{1}{\zeta(s)}\right| \leqslant \zeta(\sigma)$,

c) $|\log \zeta(s)| \leqslant \log \zeta(\sigma)$.

Beweis. a) ist trivial.

b) Aus $\displaystyle\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ folgt $\displaystyle\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \zeta(\sigma)$.

c) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} \frac{1}{p^{ks}},$$

vgl. Satz 2.2. Daraus folgt

$$|\log \zeta(s)| \leqslant \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k \geqslant 1} \left|\frac{1}{k} \frac{1}{p^{ks}}\right| = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} \frac{1}{p^{k\sigma}} = \log \zeta(\sigma), \quad \text{q.e.d.}$$

9.2. Lemma. *Mit der Bezeichnung $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *und $s \neq 1$ und alle $x \geqslant 1$*

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} + \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\, du \\ &= \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} + R(s,x) \end{aligned}$$

mit

$$|R(s,x)| \leqslant \Big(2 + \frac{|t|}{\sigma}\Big) \frac{1}{x^\sigma}, \qquad (s = \sigma + it).$$

Beweis. Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ folgt mit Abelscher partieller Summation

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s} &= \frac{\lfloor x\rfloor}{x^s} + s\int_1^x \frac{\lfloor u\rfloor}{u^{s+1}}\,du \\ &= \frac{1}{x^{s-1}} + s\int_1^x \frac{1}{u^s}\,du - \frac{\{x\}}{x^s} - s\int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,du \\ &= \frac{s}{s-1} - \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{x^{s-1}} - \frac{\{x\}}{x^s} - s\int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,du.\end{aligned}$$

Lässt man x gegen ∞ gehen, erhält man daraus

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,du$$

und, indem man beide Gleichungen von einander abzieht,

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{x^{s-1}} + \frac{\{x\}}{x^s} - s\int_x^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,du.$$

Da das Integral sogar für $\mathrm{Re}(s) > 0$ absolut konvergiert, gilt die obige Darstellung von $\zeta(s)$ in der ganzen Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$, $(s \neq 1)$.
Um das Restglied

$$R(s,x) := \frac{\{x\}}{x^s} - s\int_x^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,du$$

abzuschätzen, bemerken wir, dass $|\frac{\{x\}}{x^s}| \leqslant x^{-\sigma}$ und

$$\left|s\int_x^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,du\right| \leqslant |s|\int_x^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}} = \frac{|s|}{\sigma}\frac{1}{x^\sigma} \leqslant \frac{\sigma+|t|}{\sigma}\frac{1}{x^\sigma}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

9.3. Satz. $|\zeta(1+it)| = O(\log|t|)$ *für* $|t| \to \infty$.

Beweis. Wegen $\zeta(1-it) = \overline{\zeta(1+it)}$ braucht man nur den Fall $t > 0$ zu betrachten.
Speziell für $s = 1+it$, $t > 0$, ergibt die Formel von Lemma 9.2

$$|\zeta(1+it)| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} + \frac{1}{t} + (2+t)\frac{1}{x}.$$

Setzt man $x := t$, folgt

$$|\zeta(1+it)| \leqslant \sum_{n\leqslant t}\frac{1}{n} + O(1) = O(\log t) \quad \text{für } t\to\infty,\ \text{q.e.d.}$$

9.4. Satz. *Sei* $0 < \theta < 1$. *Dann gilt*

$$|\zeta(s)| = O(|t|^{1-\theta}) \quad \textit{für } |t| \to \infty$$

gleichmäßig in $\mathrm{Re}(s) \geqslant \theta$.

Dabei bedeutet hier "gleichmäßig in $\mathrm{Re}(s) \geqslant \theta$", dass es nur von θ abhängige positive Konstanten K und t_0 gibt, so dass

$$|\zeta(\sigma + it)| \leqslant K|t|^{1-\theta} \quad \text{für alle } \sigma \geqslant \theta \text{ und } |t| \geqslant t_0.$$

Nach evtl. Vergrößerung von K kann man sogar $t_0 = 1$ wählen.

Beweis. O.B.d.A. sei $t = \mathrm{Im}(s) \geqslant 1$. Da $|\frac{1}{s-1}| \leqslant 1$ für $t \geqslant 1$ folgt aus Lemma 9.2

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^\sigma} + x^{1-\sigma} + \Big(2 + \frac{t}{\sigma}\Big)\frac{1}{x^\sigma}.$$

Wir wählen wieder $x = t$. Für $\sigma \geqslant \theta$ folgt dann

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n \leqslant t} \frac{1}{n^\theta} + t^{1-\theta} + \Big(2 + \frac{t}{\theta}\Big)\frac{1}{t^\theta}.$$

Wegen $\displaystyle\sum_{n \leqslant t} \frac{1}{n^\theta} \leqslant 1 + \frac{t^{1-\theta}}{1-\theta}$ folgt die Behauptung des Satzes.

9.5. Lindelöfsche Vermutung. Die *Lindelöfsche μ-Funktion* ist definiert durch

$$\mu_{\mathrm{Li}}(\sigma) := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : |\zeta(\sigma + it)| = O(t^\alpha) \text{ für } t \to \infty\}.$$

Nach den Sätzen 9.1 und 9.3 gilt $\mu_{\mathrm{Li}}(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqslant 1$ und nach Satz 9.4 ist $\mu_{\mathrm{Li}}(\sigma) \leqslant 1 - \sigma$ für $0 < \sigma < 1$.

Die Lindelöfsche Vermutung besagt, dass

$$\mu_{\mathrm{Li}}(\sigma) = 0 \quad \text{für alle } \sigma > \tfrac{1}{2},$$

d.h. $|\zeta(\sigma + it)| = O(t^\varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$.

Wir werden beweisen, dass aus der Riemannschen Vermutung die Lindelöfsche Vermutung folgt. Dazu benötigen wir funktionentheoretische Hilfsmittel, den Satz von Borel/Carathédory und den Dreikreisesatz von Hadamard.

Der erste Satz zeigt, wie man für eine holomorphe Funktion aus einer Abschätzung für den Realteil eine Abschätzung für den Betrag erhalten kann.

9.6. Satz (Borel/Carathéodory). *Sei* $f : D_R \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion in der Kreisscheibe* $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. *Es gelte*

$$\sup\{\operatorname{Re} f(z) : z \in D_R\} =: M < \infty.$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leqslant r < R$

$$|f(z)| \leqslant 2M \frac{r}{R-r} + |f(0)| \frac{R+r}{R-r}.$$

Man beachte, dass nur eine *obere* Schranke für $\operatorname{Re}(f(z))$ nötig ist.

Beweis. a) Wir behandeln zunächst den Spezialfall

$$R = 1, \quad M = \tfrac{1}{2}, \quad f(0) = 0.$$

Wegen $\operatorname{Re}(f(z)) \leqslant \frac{1}{2}$ folgt

$$|f(z)| \leqslant |1 - f(z)| \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| < 1,$$

d.h. für die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{1 - f(z)} \quad \text{gilt} \quad |g(z)| \leqslant 1 \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| < 1.$$

Da $g(0) = 0$, folgt aus dem Schwarzschen Lemma $|g(z)| \leqslant |z|$ für $|z| < 1$, also

$$\left|\frac{f(z)}{1 - f(z)}\right| \leqslant |z| \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{1 - |z|}.$$

Damit ist der Spezialfall bewiesen.

b) Sei jetzt $R > 0$ und M beliebig, aber immer noch $f(0) = 0$ vorausgesetzt (daraus folgt $M > 0$). Dieser Fall kann durch Betrachtung der Funktion

$$g(z) := \frac{1}{2M} f(Rz)$$

sofort auf a) zurückgeführt werden.

c) Im allgemeinen Fall setzen wir $g(z) := f(z) - f(0)$. Dann gilt

$$\sup_{|z|<R} \operatorname{Re}(g(z)) \leqslant \sup_{|z|<R} \operatorname{Re}(f(z)) + |f(0)|,$$

also nach b)

$$|f(z) - f(0)| \leqslant 2(M + |f(0)|) \frac{r}{R-r},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leqslant 2M\,\frac{r}{R-r} + |f(0)|\Big(\frac{2r}{R-r}+1\Big)\\ &= 2M\,\frac{r}{R-r} + |f(0)|\,\frac{R+r}{R-r}, \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

9.7. Anwendung. Sei $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{RH}(\theta)$ die folgende Aussage:

$\mathrm{RH}(\theta)$: $\quad \zeta(s)$ hat keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}(s) > \theta$.

Es ist also $\mathrm{RH}(\frac{1}{2})$ die klassische Riemannsche Vermutung (RH = *Riemann hypothesis*). Es gilt RH(1), aber für kein $\theta < 1$ ist $\mathrm{RH}(\theta)$ bewiesen.

Im Folgenden gehen wir von der Annahme $\mathrm{RH}(\theta)$ mit einem $\theta < 1$ aus. Sei

$$G_\theta := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \theta\} \smallsetminus \{\sigma \in \mathbb{R} : \sigma \leqslant 1\}$$

G_θ ist einfach zusammenhängend und nach Annahme ist $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in G_\theta$. Also existiert in G_θ ein eindeutiger Zweig von $\log\zeta(s)$, den wir wieder so wählen, dass er für reelles $\sigma > 1$ reelle Werte annimmt. Nach Satz 9.4 gibt eine Konstante $C > 0$ und ein $t_0 > 0$, so dass

$$\mathrm{Re}\log\zeta(s) = \log|\zeta(s)| \leqslant C\log t \quad \text{für alle } s = \sigma + it \in G_\theta \text{ mit } |t| \geqslant t_0.$$

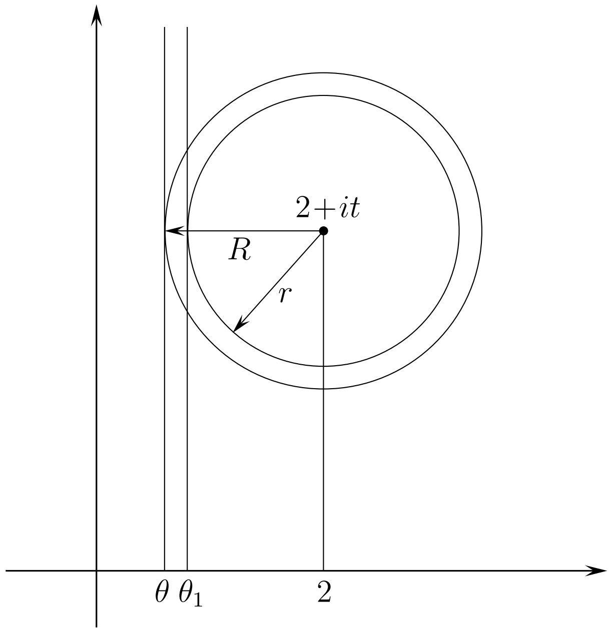
Hierauf kann nun der Satz von Borel/Carathéodory angewendet werden und wir erhalten folgende Abschätzung von $\log\zeta(s)$.

9.8. Satz. *Es gelte* $\mathrm{RH}(\theta)$ *mit* $\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1$. *Dann gilt für alle* $\theta_1 > \theta$

$$|\log\zeta(\sigma+it)| = O(\log|t|) \quad \textit{für } |t| \to \infty$$

gleichmäßig in $\sigma \geqslant \theta_1$.

Beweis. Wir wenden Satz 9.6 auf die Funktion $f(s) := \log\zeta(s)$ im Kreis mit Mittelpunkt $2 + it$ und Radius $R := 2 - \theta$ und den konzentrischen Kreis mit Radius $r := 2 - \theta_1$ an, siehe Figur 9.1.



Figur 9.1

Nach der Vorbemerkung gibt es eine Konstante $C_1 > 0$, so dass $\operatorname{Re} f$ im größeren Kreis einer Abschätzung $\operatorname{Re} f(s) \leqslant C_1 \log |t|$, $(|t| \geqslant t_0)$, genügt. Da nach Satz 9.1c) $|\log \zeta(2+it)| \leqslant \log \zeta(2)$, folgt im kleineren Kreis

$$\sup_{|s-(2+it)|\leqslant r} |\log \zeta(s)| \leqslant 2C_1 \log |t| \frac{r}{R-r} + \frac{R+r}{R-r} \log \zeta(2) = O(\log |t|).$$

Weil jeder Punkt $\sigma + it$ mit $\sigma \geqslant \theta_1$ im Kreis $\{|s-(2+it)| \leqslant r\}$ liegt, folgt die Behauptung.

9.9. Satz (Hadamardscher Dreikreisesatz). *Sei* $0 \leqslant \rho < R$ *und*

$$f : \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < R\} \to \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion, die nicht identisch verschwindet. Für $\rho < r < R$ *werde definiert*

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Dann ist $\log M(r)$ *eine konvexe Funktion von* $\log r$.

Bemerkungen. a) Es gilt stets $M(r) > 0$, denn aus $M(r) = 0$ würde folgen, dass f identisch 0 ist.

b) Eine auf einem offenen Intervall $]a, b[\, \subset \mathbb{R}$ definierte reelle Funktion F ist genau dann konvex, wenn für alle $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ gilt

$$F(x_2) \leqslant \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F(x_3).$$

Damit sagt der Hadamardsche Dreikreisesatz, dass

$$\log M(r_2) \leqslant \frac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)} \log M(r_1) + \frac{\log(r_2/r_1)}{\log(r_3/r_1)} \log M(r_3),$$

oder nach Anwendung der Exponentialfunktion

$$M(r_2) \leqslant M(r_1)^\lambda M(r_3)^{1-\lambda} \quad \text{mit } \lambda := \frac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)}.$$

Beweis von Satz 9.9. Seien $\rho < r_1 < r_2 < r_3 < R$. Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{M(r_3)}{M(r_1)} = \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^\alpha,$$

d.h.

$$M(r_3) r_3^{-\alpha} = M(r_1) r_1^{-\alpha} =: M_0.$$

Definiere die reelle Funktion $H : \{\rho < |z| < R\} \to \mathbb{R}$

$$H(z) := |f(z)| \cdot |z|^{-\alpha}.$$

Dann ist

$$\sup_{|z|=r_3} H(z) = M_0 = \sup_{|z|=r_1} H(z).$$

Nun ist H lokal der Betrag einer holomorphen Funktion. Also gilt für H das Maximum-Prinzip, insbesondere

$$\sup_{|z|=r_2} H(z) = M(r_2) r_2^{-\alpha} \leqslant M_0,$$

also

$$M(r_2) r_2^{-\alpha} \leqslant M_0 = M_0^\lambda M_0^{1-\lambda} = M(r_1)^\lambda r_1^{-\alpha\lambda} M(r_3)^{1-\lambda} r_3^{-\alpha(1-\lambda)}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit

$$\lambda := \frac{\log(r_3/r_2)}{\log(r_3/r_1)}$$

gilt $r_2 = r_1^\lambda r_3^{1-\lambda}$, und dies eingesetzt ergibt die Behauptung.

9.10. Satz. *Es gelte* RH(θ), $(\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1)$. *Dann gilt für jedes* $\theta_1 > \theta$ *und jedes* $\varepsilon > 0$

$$|\zeta(s)| = O(t^\varepsilon) \quad \textit{und} \quad \left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = O(t^\varepsilon) \qquad \textit{für } t = \mathrm{Im}(s) \to \infty$$

gleichmäßig in $\sigma = \mathrm{Re}(s) \geqslant \theta_1$.

Hieraus ergibt sich insbesondere, dass die Lindelöfsche Vermutung aus der Riemannschen Vermutung folgt.

Beweis. Wir wählen noch θ' und δ mit $\theta < \theta' < \theta_1$ und $0 < \delta < 1$ und betrachten für $t \geqslant 2$ die Kreise mit Mittelpunkt $2 + it$ und Radien

$$r_1 := 1 - \delta, \qquad r_2 := 2 - \theta_1, \qquad r_3 := 2 - \theta'.$$

Wir wenden den Dreikreisesatz für diese Kreise auf die Funktion $\log \zeta(s)$ an. Sei

$$M_t(r) := \sup\{|\log \zeta(s)| : |s - (2 + it)| = r\}.$$

Nach Satz 9.1c) gilt

$$M_t(r_1) \leqslant \zeta(1 + \delta) =: C_1$$

und nach Satz 9.8 ist

$$M_t(r_3) \leqslant C_3 \log t \qquad \text{für } t \geqslant t_3$$

mit einer Konstanten $C_3 > 0$. Es folgt

$$M_t(r_2) \leqslant C_1^\lambda (C_3 \log t)^{1-\lambda} = C(\log t)^\alpha,$$

wobei $\alpha := 1 - \lambda = \dfrac{\log(r_2/r_1)}{\log(r_3/r_1)} < 1$, also

$$|\log \zeta(s)| \leqslant C(\log t)^\alpha \quad \text{für alle } \sigma = \mathrm{Re}(s) \geqslant \theta_1 \text{ und } t = \mathrm{Im}(s) \geqslant t_3.$$

Daraus folgt

$$|\zeta(s)| \leqslant e^{C(\log t)^\alpha} \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leqslant e^{C(\log t)^\alpha}.$$

Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{(\log t)^\alpha}{\log t} = 0$ ist $e^{C(\log t)^\alpha} = O(t^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, woraus die Behauptung des Satzes folgt.