7. Die Funktionalgleichung der Zetafunktion

7.1. Satz (Poissonsche Summenformel). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit*

$$f(x) = O(|x|^{-2}) \quad \textit{und} \quad f'(x) = O(|x|^{-2}) \quad \textit{für } |x| \to \infty$$

und sei

$$\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x t} dx.$$

die Fourier-Transformierte von f. Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

Bemerkung. Der Satz gilt auch unter schwächeren Voraussetzungen über die Funktion f. Diese Form genügt uns aber. Die Bedingung $f(x) = O(|x|^{-2})$ garantiert die Existenz des Fourier-Integrals und der unendlichen Summe $\sum f(n)$.

Beweis. Wir definieren eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$F(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n).$$

Nach der Voraussetzung über f konvergiert diese Reihe gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, ebenso die Reihe der Ableitungen. Daher ist F eine stetig differenzierbare Funktion. Außerdem gilt offensichtlich $F(x+1) = F(x)$, d.h. F ist periodisch mit der Periode 1. Wir können deshalb F in eine Fourier-Reihe

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$$

entwickeln. Da F stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen F. Für die Fourier-Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}.$$

Die Reihen konvergieren sogar gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Setzt man hierin $x = 0$, erhält man die Behauptung.

7.2. Beispiele

a) Wir wollen die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := e^{-\pi x^2}$$

berechnen. Es wird sich herausstellen, dass f seine eigene Fourier-Transformierte ist, d.h.

$$\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Es ist

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixt} dx$$

Speziell für $t = 0$ ist

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = [\text{Substitution } u = \pi x^2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} u^{-1/2}e^{-u}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 1.\end{aligned}$$

Für $t \neq 0$ ist

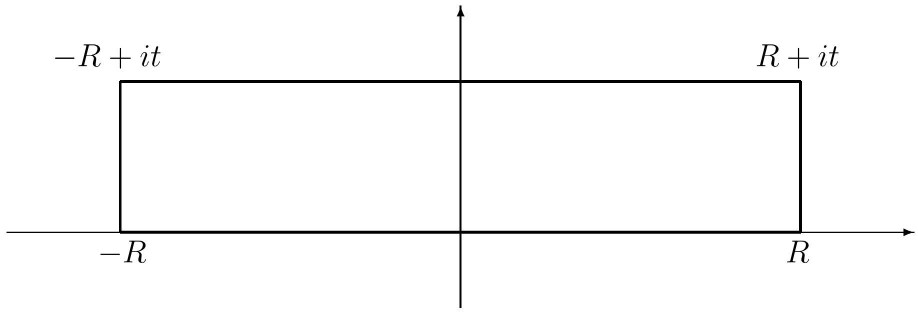
$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi ixt} dx = e^{-\pi t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+it)^2} dx$$

Wir zeigen jetzt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+it)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1. \tag{2}$$

Daraus folgt dann unmittelbar die Behauptung (1). Um (2) zu beweisen, wählen wir ein $R > 0$ und integrieren die holomorphe Funktion $f(z) := e^{-\pi z^2}$ über den Rand des Rechtecks mit den Ecken $-R, R, R+it, -R+it$, siehe Figur 7.1. Nach dem Residuensatz ist das gesamte Randintegral gleich 0, d.h.

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz = \int_{-R+it}^{R+it} f(z)dz - \int_{R}^{R+it} f(z)dz + \int_{-R}^{-R+it} f(z)dz \tag{3}$$



Figur 7.1

Man sieht unmittelbar, dass

$$\left|\int_{\pm R}^{\pm R+ia} f(z)dz\right| \longrightarrow 0 \quad \text{für } R \to \infty$$

Da

$$\int_{-R+it}^{R+it} f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{-(x+it)^2}dx$$

folgt aus (3) durch Grenzübergang $R \to \infty$ die Behauptung (2).

b) Für eine reelle Zahl $\lambda > 0$ betrachten wir die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_\lambda(x) := e^{-\pi\lambda x^2}$$

Behauptung. Für die Fourier-Transformierte gilt

$$\widehat{f_\lambda}(t) = \frac{e^{-\pi t^2/\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Beweis hierfür. Nach Definition der Fourier-Transformation gilt

$$\widehat{f_\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\lambda x^2} e^{-2\pi i x t} dt.$$

Mit den Substitutionen $\xi = \sqrt{\lambda}x$ und $\tau = t/\sqrt{\lambda}$ kann man dies auf a) zurückführen und erhält man

$$\widehat{f_\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\xi^2} e^{-2\pi i\xi\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{-\pi\tau^2}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{-\pi t^2/\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \quad \text{q.e.d.}$$

7.3. Satz (Funktionalgleichung der Theta-Reihe).
Die Theta-Reihe ist für reelles $x > 0$ definiert durch

$$\theta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}.$$

Sie genügt der folgenden Funktionalgleichung:

$$\theta\Big(\frac{1}{x}\Big) = \sqrt{x}\theta(x) \quad \textit{für alle } x > 0,$$

d.h.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/x}.$$

Bemerkung. Die Theta-Reihe und ihre sämtlichen Ableitungen konvergieren gleichmäßig auf jedem Intervall $[\varepsilon, \infty[$, $\varepsilon > 0$; daher ist θ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $]0, \infty[$.

Beweis. Wir wenden die Poissonsche Summenformel auf die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_\lambda(x) := e^{-\pi\lambda x^2}$$

an. Dabei ist $\lambda > 0$ ein reeller Parameter. Da $\widehat{f_\lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\pi t^2/\lambda}$, folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\lambda n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\pi n^2/\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Schreibt man x statt λ, ergibt sich die Behauptung des Satzes.

7.4. Corollar. *Die im vorigen Satz definierte Funktion $\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$ genügt der Abschätzung*

$$\theta(x) = O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big) \quad \textit{für } x \searrow 0.$$

7.5. Lemma. *Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt*

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{s/2} \int_0^\infty t^{s/2} \Big(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}\Big) \frac{dt}{t}.$$

Bemerkung. Die Funktion

$$\psi(t) := \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}$$

konvergiert für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0. Es gilt $\theta(t) = 1 + 2\psi(t)$, d.h. $\psi(t) = \frac{1}{2}(\theta(t) - 1)$. Aus Corollar 7.4 folgt deshalb

$$\psi(t) = O\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big) \qquad \text{für } t \searrow 0.$$

Dies zeigt, dass das Integral für $\mathrm{Re}(s) > 1$ existiert.

Beweis. Wir gehen aus vom der Eulerschen Integral-Darstellung für $\Gamma(s/2)$,

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) = \int_0^\infty t^{s/2} e^{-t} \frac{dt}{t}, \quad (\mathrm{Re}(s) > 0),$$

und machen die Substitution $t = \pi n^2 \tilde{t}$. Dabei ist n eine natürliche Zahl. Da $d\tilde{t}/\tilde{t} = dt/t$, erhalten wir (nachdem wir wieder t statt $\tilde{t}$ schreiben)

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) = n^s \pi^{s/2} \int_0^\infty t^{s/2} e^{-\pi n^2 t} \frac{dt}{t}.$$

Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \pi^{s/2} \int_0^\infty t^{s/2} e^{-\pi n^2 t} \frac{dt}{t} \\
&= \pi^{s/2} \int_0^\infty t^{s/2} \Big(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}\Big) \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Summation und Integration ist wegen des Satzes von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue-Integralen erlaubt.

7.6. Satz (Funktionalgleichung der Zetafunktion).

a) *Die Funktion*

$$\xi(s) := \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s),$$

lässt meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Die fortgesetzte Funktion ist holomorph bis auf zwei Pole erster Ordnung an den Stellen $s = 0$, $s = 1$ und genügt der Funktionalgleichung

$$\xi(1 - s) = \xi(s).$$

b) *Die Zetafunktion selbst lässt sich ebenfalls meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen mit einem einzigen Pol an der Stelle $s = 1$. Es gilt die Funktionalgleichung*

$$\zeta(1 - s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\,\Gamma(s)\cos(\tfrac{\pi s}{2})\,\zeta(s).$$

Beweis. a) Nach Lemma 7.5 gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$ mit $\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$

$$\xi(s) = \int_0^\infty t^{s/2}\psi(t)\frac{dt}{t} = \int_0^1 t^{s/2}\psi(t)\frac{dt}{t} + \int_1^\infty t^{s/2}\psi(t)\frac{dt}{t} \tag{4}$$

Aus der Funktionalgleichung für die Thetafunktion folgt für $\psi(t) = \frac{1}{2}(\theta(t) - 1)$

$$\psi(t) = t^{-1/2}\psi(1/t) - \tfrac{1}{2}(1 - t^{-1/2}).$$

Wir setzen dies in das Integral von 0 bis 1 ein und erhalten

$$\int_0^1 t^{s/2}\psi(t)\frac{dt}{t} = \int_0^1 t^{(s-1)/2}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{dt}{t} + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (t^{(s-1)/2} - t^{s/2})\frac{dt}{t}. \tag{5}$$

Das letzte Integral kann man explizit berechnen (man beachte, dass $\mathrm{Re}(s) > 1$):

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 (t^{(s-1)/2} - t^{s/2})\frac{dt}{t} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Im ersten Integral auf der rechten Seite von (5) machen wir die Substitution $\tilde{t} = 1/t$ und erhalten

$$\int_0^1 t^{(s-1)/2}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{dt}{t} = \int_1^\infty t^{(1-s)/2}\psi(t)\frac{dt}{t}.$$

Setzt man alles in (4) ein, ergibt sich

$$\xi(s) = \int_0^\infty t^{s/2}\psi(t)\frac{dt}{t} = \int_1^\infty (t^{(1-s)/2} + t^{s/2})\,\psi(t)\frac{dt}{t} + \Big(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\Big). \tag{6}$$

Da $\psi(t)$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0 geht, konvergiert das Integral auf der rechten Seite gegen eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $g(s)$. Somit liefert (6) eine Fortsetzung von $\xi(s)$ als meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Polen 1. Ordnung an den Stellen $s = 1$ und $s = 0$. Da die Darstellung (6) invariant unter der Abbildung $s \mapsto 1 - s$ ist, folgt $\xi(1 - s) = \xi(s)$, d.h. Teil a) des Satzes ist bewiesen.

b) Wegen

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

lässt sich auch die Zetafunktion meromorph nach ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Die Funktion $s \mapsto \frac{1}{\Gamma(s/2)}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und hat eine Nullstelle 1. Ordnung bei $s = 0$, die sich gegen die Polstelle 1. Ordnung der Funktion $\xi(s)$ weghebt. Deshalb ist $\zeta(s)$ holomorph in $\mathbb{C}$ bis auf den Pol 1. Ordnung bei $s = 1$.

Aus der Funktionalgleichung von ξ können wir nun die Funktionalgleichung der Zetafunktion ableiten:

$$\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\,\zeta(1-s) = \pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\,\zeta(s)$$

ergibt

$$(7)\qquad \zeta(1-s) = \pi^{1/2-s}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)^{-1}\zeta(s).$$

Nun benutzen wir zwei Formeln aus der Theorie der Gammafunktion

$$\text{(a)}\qquad \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin\pi z}{\pi} \qquad\qquad \text{(Euler)}$$

$$\text{(b)}\qquad \Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1+z}{2}\Big) = 2^{1-z}\sqrt{\pi}\Gamma(z) \qquad \text{(Legendre)}$$

Aus (a) folgt

$$\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)^{-1}\Gamma\Big(\frac{1+s}{2}\Big)^{-1} = \frac{\sin(\pi\frac{1+s}{2})}{\pi} = \frac{\cos(\frac{\pi s}{2})}{\pi}.$$

Damit lässt sich die Formel (7) umformen zu

$$\zeta(1-s) = \pi^{-1/2-s}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1+s}{2}\Big)\cos(\tfrac{\pi s}{2})\,\zeta(s),$$

woraus unter Benutzung von (b) folgt

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos(\tfrac{\pi s}{2})\,\zeta(s), \qquad \text{q.e.d.}$$

7.7. Corollar.
a) *Für jede ganze Zahl $k > 0$ gilt*

$$\zeta(-2k) = 0.$$

Dies sind die einzigen Nullstellem der Zetafunktion in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) < 0$. *Man nennt diese Nullstellen die* trivialen Nullstellen *der Zetafunktion.*

b) $\qquad \zeta(0) = -\frac{1}{2}.$

c) *Für jede ganze Zahl $k > 0$ gilt*

$$\zeta(1-2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}.$$

Beweis. a) Wir benutzen die Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos\tfrac{\pi s}{2}\,\zeta(s)$$

$\mathrm{Re}(1-s) < 0$ ist gleichbedeutend mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Da $\zeta(s) \neq 0$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$, kommen die einzigen Nullstellen der rechten Seite in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 1$ von der Cosinus-Funktion. Nun ist

$$\cos\tfrac{\pi s}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = 1 + 2k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Daraus folgt Behauptung a).

c) Wir benutzen zum Beweis die Eulerschen Formeln

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k} \quad \text{für alle } k \geqslant 1.$$

Die Funktionalgleichung liefert

$$\begin{aligned}\zeta(1-2k) &= 2^{1-2k}\pi^{-2k}\Gamma(2k)\cos(\pi k)\zeta(2k)\\ &= \frac{2}{(2\pi)^{2k}}(2k-1)!\,(-1)^k\zeta(2k).\end{aligned}$$

Setzt man darin die Eulerschen Formeln ein, erhält man

$$\zeta(1-2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}.$$

b) Wir schreiben die Funktionalgleichung in der Form $\zeta(1-s) = f_1(s)f_2(s)$ mit

$$f_1(s) := 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s) \quad \text{und} \quad f_2(s) := \cos\tfrac{\pi s}{2}\,\zeta(s).$$

f_1 ist holomorph in einer Umgebung von $s = 1$ und $f_1(1) = 1/\pi$. Die Funktion f_2 ist ebenfalls holomorph in einer Umgebung von $s = 1$, da der Pol der Zetafunction von der Nullstelle des Cosinus aufgehoben wird. Um $f_2(1)$ zu berechnen, bestimmen wir die ersten Glieder der Taylor- bzw. Laurent-Entwicklung der Faktoren.

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{\pi s}{2} &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}(s-1) + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2}(s-1)\right) = -\tfrac{\pi}{2}(s-1) + O((s-1)^3),\\ \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + (\text{holomorphe Funktion}).\end{aligned}$$

Multipliziert man beide Ausdrücke, erhält man $f_2(s) = -\frac{\pi}{2} + O(s-1)$, d.h. $f_2(1) = -\frac{\pi}{2}$. Daher gilt

$$\zeta(0) = f_1(1)f_2(1) = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{q.e.d.}$$

7.8. Die Riemannsche Vermutung

Aus Satz 6.1 und der Funktionalgleichung folgt, dass $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ with $\mathrm{Re}(s) = 0$. Außer den trivialen Nullstellen der Zetafunktion an den Stellen $s = -2k$, $k \geqslant 1$ ganz, müssen deshalb alle anderen Nullstellen der Zetafunktion im Streifen $S := \{s \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ liegen. Betrachten wir die schon in Satz 7.6 definierte Funktion

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Da der Faktor $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ für $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ holomorph und ungleich Null ist, haben $\zeta(s)$ und $\xi(s)$ in dem Streifen diesselben Nullstellen. Wegen

$$\xi(1-s) = \xi(s) \qquad \text{und} \qquad \xi(\overline{s}) = \overline{\xi(s)}$$

gilt: Ist $s = \frac{1}{2} + x + it$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, und

$$\xi(\tfrac{1}{2} + x + it) = 0, \qquad \text{so folgt}$$

$$\xi(\tfrac{1}{2} - x + it) = 0, \quad \xi(\tfrac{1}{2} + x - it) = 0, \quad \xi(\tfrac{1}{2} - x - it) = 0.$$

Die nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion liegen also sowohl symmetrisch zur reellen Achse, als auch zur Geraden $\{\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$.

Nach einer Vermutung von Riemann aus dem Jahre 1859 liegen alle nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion sogar auf der Geraden $\{\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$. Diese Vermutung zählt zu den Millenniums-Problemen und ist bis heute unbewiesen.