6. Beweis des Primzahlsatzes

Ein wesentlicher Punkt im Beweis des Primzahlsatzes ist das Nichtverschwinden der Zetafunktion auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1$. Dies zeigen wir jetzt.

6.1. Satz. *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\zeta(1+it) \neq 0.$$

Beweis. Wir bentzen die Ungleichung

$$3 + 4\cos t + \cos 2t \geqslant 0 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

die wie folgt bewiesen werden kann: Da $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$, folgt

$$3 + 4\cos t + \cos 2t = 2(1 + 2\cos t + \cos^2 t) = 2(1+\cos t)^2 \geqslant 0.$$

Sei nun $s = \sigma + it$ eine komplexe Zahl mit $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$. Durch Logarithmieren des Euler-Produkts $\zeta(s) = \prod \frac{1}{1-p^{-s}}$ erhalten wir

$$\log \zeta(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \log \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{p^{ks}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

wobei

$$a_n = \begin{cases} 1/k, & \text{falls } n = p^k \text{ mit einer Primzahl } p \text{ und } k \geqslant 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\log|z| = \mathrm{Re}(\log z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ und alle $a_n \geqslant 0$ sind, folgt

$$\log|\zeta(s)| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{Re}(n^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} \cos(t \log n).$$

Nach einem Trick of v. Mangoldt (1895) betrachten wir den Ausdruck

$$\log\Big(|\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma+it)|^4 |\zeta(\sigma+2it)|\Big)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} \Big(\underbrace{3 + 4\cos(t\log n) + \cos(2t\log n)}_{\geqslant 0}\Big) \geqslant 0.$$

Daher ist

$$\big|\zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma+it)^4 \zeta(\sigma+2it)\big| \geqslant 1 \quad \text{für alle } \sigma > 1 \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Angenommen, es wäre $\zeta(1+it) = 0$ für ein $t \neq 0$. Dann hat die Funktion

$$s \mapsto \zeta(s)^3 \zeta(s+it)^4$$

Kap. 6 zuletzt geändert am: 2011-06-08

bei $s = 1$ eine Nullstelle, denn der Pol der Ordnung 3 von $\zeta(s)^3$ wird durch die Nullstelle der Ordnung $\geqslant 4$ der Funktion $\zeta(s+it)^4$ aufgehoben. Daraus folgt

$$\lim_{\sigma \searrow 1} \left|\zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma+it)^4 \zeta(\sigma+2it)\right| = 0,$$

was der vorigen Abschätzung widerspricht. Daher ist die Annahme falsch und der Satz bewiesen.

6.2. Satz (Ingham/Newman). *Sei*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine Dirichlet-Reihe mit $|a_n| \leqslant 1$ für alle n. Die dadurch in der Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$ definierte holomorphe Funktion lasse sich in eine offene Umgebung der abgeschlossenen Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) \geqslant 1\}$ fortsetzen. Dann konvergiert die Dirichlet-Reihe auch für $s = 1$ und es gilt

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n},$$

wobei hier $f(1)$ den Wert der fortgesetzten Funktion bezeichnet.

Beweis (D.J. Newman 1980). Wir führen zuerst eine Koordinaten-Transformation durch, die den Punkt $s = 1$ in den Nullpunkt transformiert. Sei

$$F(s) := f(1+s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \qquad \text{mit } b_n := \frac{a_n}{n}.$$

Die Funktion F ist in der rechten Halbebene $H(0) = \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ holomorph und lässt sich in eine offene Umgebung $U \supset \overline{H(0)}$ der abgeschlossenen Halbebene fortsetzen. Die fortgesetzte Funktion werde ebenfalls mit F bezeichnet. Es sei

$$F_N(s) := \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n^s}.$$

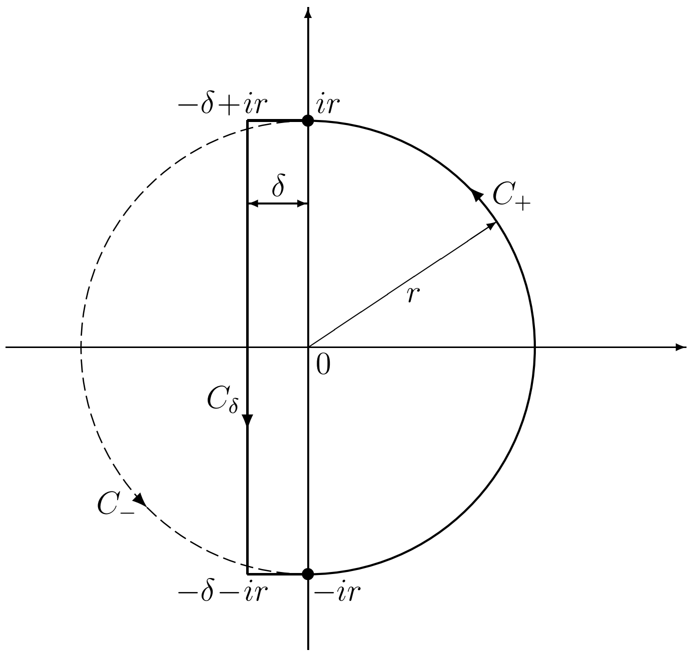
Die Behauptung des Satzes ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{N \to \infty} (F(0) - F_N(0)) = 0.$$

Die Funktion $F - F_N$ ist holomorph in $U \supset \overline{H(0)}$. Daher kann ihr Wert an der Stelle $s = 0$ mittels der Cauchyschen Integralformel

$$F(0) - F_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s)) \frac{1}{s}\, ds$$

berechnet werden. Hier ist $C := C_+ + C_\delta$ folgende Kurve in U, vgl. Figur 6.1: C_+ ist der Halbkreis mit Radius $r > 0$ in der rechten Halbebene von $-ir$ nach $+ir$ und C_δ ist der Polygonzug von ir über $-\delta + ir$ und $-\delta - ir$ nach $-ir$. Dabei ist die Konstante $\delta > 0$ in Abhängigkeit von r so klein zu wählen, dass die Kurve C und ihr Inneres ganz in U liegen.



Figur 6.1

Die Funktion $s \mapsto (F(s) - F_N(s))N^s$ ist ebenfalls holomorph in U und ihr Wert an der Stelle $s = 0$ ist gleich $F(0) - F_N(0)$. Daher haben wir

$$F(0) - F_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s))N^s \, \frac{1}{s} \, ds$$

Mit einem Trick von Newman kann man auch schreiben

$$(*) \qquad F(0) - F_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s))N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2}\right) ds.$$

Dies ist richtig, da die hinzugefügte Funktion

$$s \mapsto (F(s) - F_N(s))\, N^s \, \frac{s}{r^2}$$

in U holomorph ist und daher ihr Integral über C verschwindet.

Zur späteren Verwendung bemerken wir noch, dass für $|s| = r$ gilt

$$\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2}\right) = \frac{\bar{s}}{s\bar{s}} + \frac{s}{r^2} = \frac{s + \bar{s}}{r^2} = \frac{2\sigma}{r^2}, \quad \text{wobei } \sigma = \mathrm{Re}(s).$$

Zum Beweis des Satzes müssen wir nun das Integral $(*)$ abschätzen.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $r := 4/\varepsilon$ und dazu ein geeignetes $\delta > 0$. Die Integralabschätzung erfolgt nun in drei Schritten.

1) Abschätzung des Integrals über die Kurve C_+.

Da die Dirichlet-Reihe F für $\mathrm{Re}(s) > 0$ konvergiert, ist

$$F(s) - F_N(s) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}.$$

Dies können wir wie folgt abschätzen

$$|F(s) - F_N(s)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^\sigma} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}} \leqslant \int_N^\infty \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = \frac{N^{-\sigma}}{\sigma}.$$

Für den Integranden

$$G_1(s) := (F(s) - F_N(s))N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2}\right)$$

gilt deshalb auf C_+

$$|G_1(s)| \leqslant \frac{N^{-\sigma}}{\sigma} N^\sigma \, \frac{2\sigma}{r^2} = \frac{2}{r^2}$$

also

$$\Big|\frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} G_1(s) ds\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} \frac{2}{r^2} \, |ds| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{r^2} \cdot \pi r = \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

2) Abschätzung des Integrals $\displaystyle\int_{C_\delta} F_N(s) N^s \Big(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2}\Big) ds$.

Da die Funktion F_N in der ganzen Ebene holomorph ist, können wir den Integrationsweg C_δ durch den Halbkreis C_- vom Radius r in der linken Halbebene von ir nach $-ir$ ersetzen.

Behauptung. Die Funktion F_N genügt in der linken Halbebene $\sigma = \mathrm{Re}(s) < 0$ der Abschätzung

$$|F_N(s)| \leqslant N^{-\sigma} \Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{|\sigma|}\Big)$$

Beweis hierfür. Es ist

$$|F_N(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{n^\sigma} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\sigma}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \qquad \text{mit } \alpha := -\sigma = |\sigma|$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

i) Es sei $0 < \alpha < 1$. Da $x \mapsto 1/x^{1-\alpha}$ monoton fällt, gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^{1-\alpha}} = 1 + \frac{1}{\alpha}(N^\alpha - 1) \leqslant \frac{N^\alpha}{\alpha} \leqslant N^\alpha\Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{\alpha}\Big).$$

ii) Falls $\alpha \geqslant 1$, ist $x \mapsto 1/x^{1-\alpha}$ (schwach) monoton wachsend, also

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leqslant N^{\alpha-1} + \int_1^N x^{\alpha-1}dx = N^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}(N^\alpha - 1) \leqslant N^\alpha\Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{\alpha}\Big).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es folgt für den Integranden

$$G_2(s) := F_N(s)N^s\Big(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2}\Big)$$

auf C_- die Abschätzung

$$|G_2(s)| \leqslant |F_N(s)N^s|\,\frac{2|\sigma|}{r^2} \leqslant \Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{|\sigma|}\Big)\frac{2|\sigma|}{r^2} \leqslant 2\Big(\frac{1}{Nr} + \frac{1}{r^2}\Big),$$

also

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} G_2(s)ds\Big| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{C_-}\Big(\frac{1}{Nr} + \frac{1}{r^2}\Big)|ds| \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{2}{r} = \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $N \geqslant r$.

3) Abschätzung des Integrals $\displaystyle\int_{C_\delta} F(s)N^s\Big(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2}\Big)ds$.

Die Funktion

$$s \mapsto G_3(s) := F(s)\Big(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2}\Big)$$

ist holomorph in einer Umgebung der Kurve C_δ. Deshalb gibt es eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\big|G_3(s)\big| \leqslant K \quad \text{für alle } s \in C_\delta.$$

Daher genügt der Integrand

$$F(s)N^s\Big(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2}\Big) = G_3(s)N^s$$

auf C_δ der Abschätzung

$$|G_3(s)N^s| \leqslant KN^\sigma.$$

Für $N \to \infty$ konvergiert KN^σ auf der Kurve C_δ mit Ausnahme der Endpunkte wegen $\sigma = \mathrm{Re}(s) < 0$ monoton fallend gegen 0. Aus dem Satz über monotone Konvergenz von Integralen folgt nun

$$\lim_{N\to\infty} \Big| \int_{C_\delta} G_3(s) N^s ds \Big| = 0;$$

es gibt deshalb eine natürliche Zahl N_0, die wir $\geqslant r$ annehmen können, so dass

$$\Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} G_3(s) N^s ds \Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } N \geqslant N_0.$$

Durch Zusammenfassung der Abschätzungen unter 1), 2) und 3) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} |F(0) - F_N(0)| &= \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_C (F(s) - F_N(s))\, N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2}\right) ds \Big| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \end{aligned}$$

für alle $N \geqslant N_0$, q.e.d.

6.3. Corollar. *Die unendliche Reihe $\sum \mu(n)/n$ konvergiert und hat den Grenzwert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Beweis. Dies folgt durch Anwendung von Satz 6.2 auf die Funktion

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Da $\zeta(s)$ nach Satz 6.1 keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}(s) = 1$ hat, ist $1/\zeta$ in einer Umgebung der abgeschlossenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geqslant 1\}$ holomorph. Da ζ bei $s = 1$ einen Pol hat, gilt $(1/\zeta)(1) = 0$.

Da nach den Sätzen 5.4 und 5.9 die Aussage $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n = 0$ mit dem Primzahlsatz äquivalent ist, folgt

6.4. Theorem (Primzahlsatz von J. Hadamard und Ch. de la Vallée Poussin 1896).

$$\pi(x) \sim \mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

6.5. Satz. *Es bezeichne $(p_n)_{n\geqslant 1}$ die Folge aller, der Größe nach geordneten Primzahlen. Dann gilt die asymptotische Beziehung*

$$p_n \sim n \log n.$$

Beweis. Es ist zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\log n} = 1.$$

Annahme, dies sei nicht der Fall. Dann tritt eine der folgenden beiden Möglichkeiten ein.

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{n\log n} > 1.$

In diesem Fall gibt es ein $\varepsilon > 0$ und beliebig große n mit

$$p_n \geqslant (1+\varepsilon)n\log n.$$

Für diese n gilt dann

$$\pi((1+\varepsilon)n\log n) \leqslant n.$$

Es würde folgen

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\pi((1+\varepsilon)n\log n)}{n} \leqslant 1.$$

Nach dem folgenden Hilfssatz 6.6 ist dieser Limes aber gleich $1+\varepsilon$, Widerspruch!

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{n\log n} < 1.$

In diesem Fall gibt es ein $\varepsilon > 0$ und beliebig große n mit

$$p_n \leqslant (1-\varepsilon)n\log n.$$

Für diese n gilt dann

$$\pi((1-\varepsilon)n\log n) \geqslant n.$$

Es würde folgen

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\pi((1-\varepsilon)n\log n)}{n} \geqslant 1,$$

was ebenfalls im Widerspruch zu Hilfssatz 6.6 steht.

6.6. Hilfssatz. *Sei $\lambda > 0$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(\lambda n\log n)}{n} = \lambda.$$

Beweis. Nach dem Primzahlsatz ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(\lambda n\log n)}{\lambda n} \cdot \frac{\log(\lambda n\log n)}{\log n} = 1.$$

Andrerseits ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\lambda n \log n)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\log\lambda + \log\log n}{\log n}\right) = 1.$$

Daraus folgt die Behauptung.

6.7. Satz. *Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $x_0 = x_0(\varepsilon)$, so dass für jedes $x \geqslant x_0$ im Intervall $[x, x(1+\varepsilon)]$ mindestens eine Primzahl liegt.*

Beweis. Nach dem Primzahlsatz gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x(1+\varepsilon))}{\pi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\varepsilon)}{x} \cdot \frac{\log x}{\log((1+\varepsilon)x)} = 1+\varepsilon.$$

Deshalb gibt es ein x_0, so dass

$$\pi(x) < \pi(x(1+\varepsilon)) \qquad \text{für } x \geqslant x_0.$$

Bemerkung. Der Satz 6.7 macht keine Aussage darüber, wie groß x_0 als Funktion von $\varepsilon > 0$ ist. Für $\varepsilon = 1$ kann man mit elementaren Mitteln beweisen, dass für jede ganze Zahl $n \geqslant 2$ mindestens eine Primzahl p existiert mit $n \leqslant p < 2n$. Diese Aussage ist das sog. *Bertrandsche Postulat*. Dies wurde zuerst von Tschebyscheff 1852 bewiesen.