

5. Äquivalenzen zum Primzahlsatz

5.1. Für reelles $x > 0$ bezeichnen wir mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$. Dies kann man auch so schreiben:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

$\pi(x)$ ist eine Treppenfunktion mit Sprüngen der Höhe 1 bei allen Primzahlen. Natürlich gilt $\pi(x) = 0$ für $x < 2$. Einige andere Werte sind

x	10	100	1000	10^4	10^5	10^6	10^7
$\pi(x)$	4	25	168	1229	9592	78498	664579

Gauß hat aufgrund von Zählungen in Primzahl-Tafeln vermutet, dass die Dichte der Primzahlen der Größenordnung x etwa gleich $\frac{1}{\log x}$ ist, dass also die Funktion

$$\text{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

eine gute Approximation von $\pi(x)$ ist. $\text{li}(x)$ heißt der *Integral-Logarithmus* von x . Tatsächlich gilt nach dem 1896 von Hadamard und de la Vallée Poussin bewiesenen Primzahlsatz die asymptotische Gleichheit

$$\pi(x) \sim \text{li}(x), \quad \text{d.h.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\text{li}(x)} = 1.$$

Als Vorbereitung zum Beweis des Primzahlsatzes werden wir in diesem Kapitel einige Aussagen vorstellen, die zum Primzahlsatz äquivalent sind.

5.2. Lemma. Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ und alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^k t} = \frac{t}{\log^k t} \Big|_2^x + k \int_2^x \frac{dt}{\log^{k+1} t} = \frac{x}{\log^k x} + O\left(\frac{x}{\log^{k+1} x}\right).$$

Insbesondere hat man die asymptotische Beziehung

$$\text{li}(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Beweis. Die Gleichung

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^k t} = \frac{t}{\log^k t} \Big|_2^x + k \int_2^x \frac{dt}{\log^{k+1} t}$$

folgt unmittelbar durch partielle Integration. Das Lemma ist deshalb bewiesen, wenn

wir zeigen können, dass

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^k t} = O\left(\frac{x}{\log^k x}\right) \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Beweis hierfür. Wir zerlegen den Integrationsweg in die Intervalle $[2, \sqrt{x}]$ und $[\sqrt{x}, x]$ (o.B.d.A. ist $x \geq 4$) und erhalten

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{dt}{\log^k t} &= \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^k t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^k t} \\ &\leq \frac{\sqrt{x}}{(\log 2)^k} + \frac{x}{(\log \sqrt{x})^k} \\ &= O(\sqrt{x}) + \frac{2^k x}{\log^k x} = O\left(\frac{x}{\log^k x}\right), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

5.3. Die Tschebyscheffschen Funktionen ϑ und ψ .

Tschebyscheff führte 1852 zwei Funktionen ϑ und ψ ein, die zur Untersuchung der Primzahl-Verteilung oft bequemer sind als die Funktion $\pi(x)$.

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &:= \sum_{p \leq x} \log p, \\ \psi(x) &:= \sum_{n \leq x} \Lambda(n). \end{aligned}$$

Dabei ist Λ die von Mangoldtsche Funktion. Nach ihrer Definition gilt deshalb

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{m \geq 1} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p = \sum_{m \geq 1} \vartheta(x^{1/m}).$$

Die Summe über m braucht nur bis $\left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor$ erstreckt zu werden, da $\vartheta(x) = 0$ für $x < 2$. Also ist

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \sum \left\{ \vartheta(x^{1/m}) : 3 \leq m \leq \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \right\}.$$

Da $\vartheta(x) = O(x)$, also $\vartheta(\sqrt{x}) = O(\sqrt{x})$, folgt

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}).$$

5.4. Satz (Tschebyscheff). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) $\pi(x) \sim \text{li}(x)$,
- (ii) $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$,

$$(iii) \quad \vartheta(x) \sim x,$$

$$(iv) \quad \psi(x) \sim x.$$

Um den Primzahlsatz zu beweisen, genügt es also zu zeigen, dass $\psi(x) \sim x$.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus Lemma 5.2. Dass (iii) und (iv) äquivalent sind, folgt aus $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x})$.

Es ist also nur noch die Äquivalenz von (ii) und (iii) zu beweisen.

Dazu wenden wir die Abelsche partielle Summation auf die Summe $\sum_{n \leq x} a_n f(n)$ mit $a_n = \log p$, falls $n = p$ prim, $a_n = 0$ sonst, und $f(x) = 1/\log x$ an.

$$\pi(x) = \sum_{2 \leq p \leq x} \log p \cdot \frac{1}{\log p} = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt.$$

Nach Corollar 2.6 gilt $\vartheta(t)/t = O(1)$, also ergibt sich mit Lemma 5.2

$$\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt = O\left(\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}\right) = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Es folgt

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

und

$$\vartheta(x) = \pi(x) \log x + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Daraus folgt die Äquivalenz von (ii) und (iii).

5.5. E. Landau hat 1911 weitere Äquivalenzen zum Primzahlsatz bewiesen, die mit der Möbiusschen μ -Funktion zusammenhängen. Man betrachte folgende Funktionen

$$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \quad \text{und} \quad m(x) := \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n}$$

Nach Landau sind die Beziehungen $M(x) = o(x)$ und $m(x) = o(1)$ zum Primzahlsatz äquivalent. Nach Satz 5.4 braucht nur die Äquivalenz mit $\psi(x) \sim x$ bewiesen zu werden. Dazu brauchen wir noch einige Vorbereitungen.

5.6. Der Hyperbel-Trick. In der analytischen Zahlentheorie tauchen öfter Summen der Gestalt

$$\sum_{k\ell \leq x} c_{k,\ell}$$

auf. Dabei sind $c_{k,\ell}$ ($k, \ell \geq 1$) komplexe Zahlen, x eine positive reelle Zahl und es wird über alle Paare k, ℓ positiver ganzer Zahlen summiert, für die $k\ell \leq x$ ist. Der Summationsbereich ist also

$$H_x := \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : k\ell \leq x\}.$$

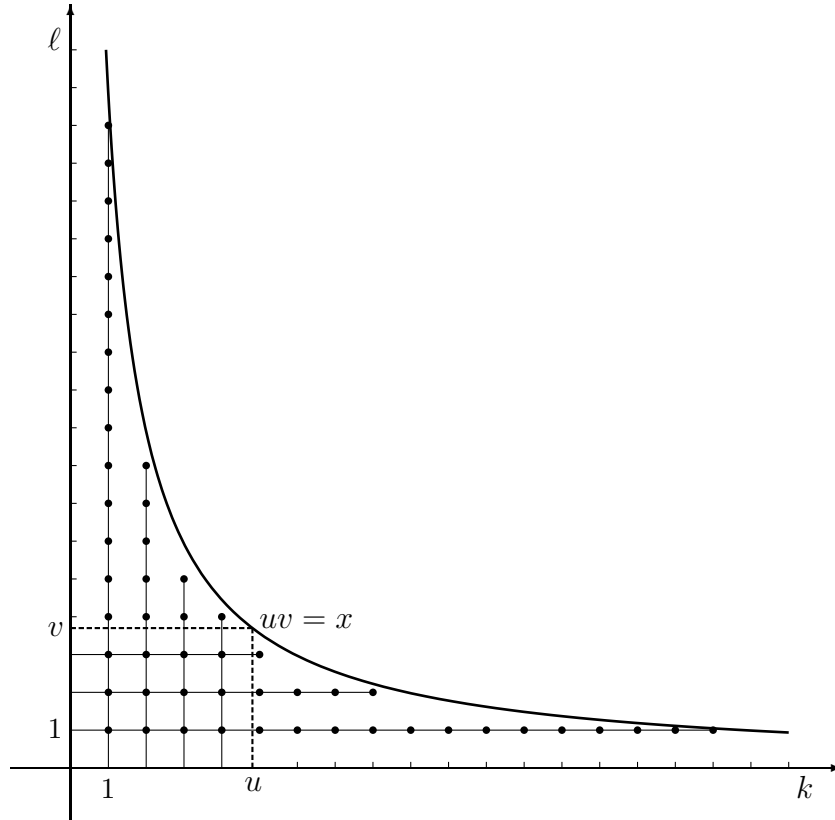
Dies sind alle Gitterpunkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten der ξ - η -Ebene, die unterhalb oder auf der Hyperbel $\xi\eta = x$ liegen. Seien nun u, v positive reelle Zahlen mit $uv = x$ und

$$\begin{aligned} H'_x &:= \{(k, \ell) \in H_x : k \leq u\} = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : k \leq u, \ell \leq x/k\}, \\ H''_x &:= \{(k, \ell) \in H_x : \ell \leq v\} = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : \ell \leq v, k \leq x/\ell\}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$H_x = H'_x \cup H''_x \quad \text{und} \quad H'_x \cap H''_x = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : k \leq u, \ell \leq v\},$$

vgl. Figur 5.1. Hier ist H'_x die Menge der durch die vertikalen Linien verbundenen Gitterpunkte und H''_x die Menge der durch die horizontalen Linien verbundenen Gitterpunkte.



Figur 5.1

Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k\ell \leq x} c_{k\ell} &= \sum_{(k,\ell) \in H_x} c_{k\ell} = \sum_{(k,\ell) \in H'_x} c_{k\ell} + \sum_{(k,\ell) \in H''_x} c_{k\ell} - \sum_{(k,\ell) \in H'_x \cap H''_x} c_{k\ell} \\ &= \sum_{k \leq u} \left(\sum_{\ell \leq x/k} c_{k\ell} \right) + \sum_{\ell \leq v} \left(\sum_{k \leq x/\ell} c_{k\ell} \right) - \sum_{\substack{k \leq u \\ \ell \leq v}} c_{k\ell} \end{aligned}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist $c_{k\ell} = a_k b_\ell$ mit Folgen (a_k) und (b_ℓ) . Aus der obigen Formel ergibt sich unmittelbar

5.7. Satz. *Seien $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ zwei Folgen komplexer Zahlen. Für reelles $x > 0$ werde definiert*

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n \quad \text{und} \quad B(x) := \sum_{n \leq x} b_n.$$

Dann gilt für alle reellen $u, v, x > 0$ mit $uv = x$

$$\sum_{k\ell \leq x} a_k b_\ell = \sum_{k \leq u} a_k B\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{\ell \leq v} b_\ell A\left(\frac{x}{\ell}\right) - A(u)B(v).$$

Als Anwendung von Satz 5.7 beweisen wir nun den Dirichletschen Teilersatz. Dieser macht eine Aussage über die durchschnittliche Teilerzahl von natürlichen Zahlen.

5.8. Satz (Dirichlet). *Für eine natürliche Zahl n bezeichne $\tau(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n . Dann gilt für reelles $x > 0$*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}).$$

Dabei ist γ die Euler-Mascheronische Konstante.

Die mittlere Teilerzahl der natürlichen Zahlen $\leq x$ ist also etwa $\log x + 2\gamma - 1$. Der Fehler ist von der Größenordnung $O(1/\sqrt{x})$.

Beweis. Die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl n ist gleich der Anzahl der Paare $(k, \ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$ mit $k\ell = n$. Dies lässt sich schreiben als

$$\tau(n) = \sum_{k\ell=n} 1.$$

Daraus folgt

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{k\ell \leq x} 1 = \sum_{k\ell \leq x} a_k b_\ell$$

mit $a_k = b_\ell = 1$ für alle $k, \ell \geq 1$. Mit den Bezeichnungen von Satz 5.7 ist dann

$$A(x) = B(x) = \lfloor x \rfloor$$

und es folgt mit $u = v = \sqrt{x}$

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + \sum_{\ell \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{\ell} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 = 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - x + O(\sqrt{x}).$$

Nun folgt unter Benutzung der Formel $\sum_{n \leq x} 1/n = \log x + \gamma + O(1/x)$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor &= \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{x}{n} + O(\sqrt{x}) \\ &= x(\log \sqrt{x} + \gamma + O(1/\sqrt{x})) + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{x}{2}(\log x + 2\gamma) + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1) ein, ergibt sich die Behauptung.

5.9. Satz. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) $\psi(x) \sim x$,
- (ii) $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$,
- (iii) $m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1)$.

Dies bedeutet, dass es zum Beweis des Primzahlsatzes genügt zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Beweis. Wir beginnen mit dem einfacheren Teil und zeigen zunächst die Implikationen

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Mit Abelscher partieller Summation erhält man

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} n = m(x) x - \int_1^x m(u) du.$$

Nach (iii) ist $m(x) = o(1)$, also $m(x)x = o(x)$; ebenso

$$(2) \quad \int_1^x m(u) du = o(x).$$

Letzteres sieht man z.B. so: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $x_0 \geq 1$, so dass $|m(x)| < \varepsilon$ für alle $x \geq x_0$, also

$$\left| \int_1^x m(u) du \right| \leq \left| \int_1^{x_0} m(u) du \right| + |x - x_0| \varepsilon$$

woraus folgt

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left| \int_1^x m(u) du \right| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (2) und damit $M(x) = o(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Wir betrachten die folgende Dirichletreihe

$$F(s) := -\zeta'(s) - \zeta(s)^2 + 2\gamma\zeta(s) =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

wobei γ die Euler-Mascheronische Konstante ist. Es gilt

$$a_n = \log n - \tau(n) + 2\gamma.$$

Nach Satz 5.8 ist

$$\begin{aligned} (3) \quad A(x) &:= \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n \leq x} \log n - \sum_{n \leq x} \tau(n) + 2\gamma \lfloor x \rfloor \\ &= x(\log x - 1) + O(\log x) - x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}) + 2\gamma x + O(1) \\ &= O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Außerdem betrachten wir die Funktion

$$G(s) := F(s) \cdot \frac{1}{\zeta(s)} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) + 2\gamma =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}.$$

Es gilt $c = a * \mu$ und

$$c_n = \Lambda(n) - 1 + 2\gamma\delta_{1n},$$

also für $x \geq 1$

$$C(x) := \sum_{n \leq x} c_n = \psi(x) - \lfloor x \rfloor + 2\gamma = \psi(x) - x + O(1).$$

Die Behauptung (i) ist also äquivalent zu $C(x) = o(x)$. Es ist

$$C(x) = \sum_{n \leq x} (a * \mu)(n) = \sum_{k\ell \leq x} a_k \mu(\ell).$$

Unter Anwendung des Hyperbel-Tricks (Satz 5.7) erhalten wir für $1 \leq y \leq x$

$$(4) \quad C(x) = \sum_{k \leq y} a_k M\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{\ell \leq x/y} \mu(\ell) A\left(\frac{x}{\ell}\right) - A(y) M\left(\frac{x}{y}\right).$$

Nach (3) ist $A(z) = O(\sqrt{z})$, d.h. $|A(z)| \leq K\sqrt{z}$ für alle $z \geq 1$ mit einer Konstanten $K > 0$. Damit schätzen wir den 2. Summanden ab:

$$\left| \sum_{\ell \leq x/y} \mu(\ell) A\left(\frac{x}{\ell}\right) \right| \leq K\sqrt{x} \sum_{\ell \leq x/y} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \leq K'\sqrt{x} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{K'}{\sqrt{y}} \cdot x.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kann man daher y so groß wählen, dass

$$\left| \sum_{\ell \leq x/y} \mu(\ell) A\left(\frac{x}{\ell}\right) \right| < \varepsilon x \quad \text{für alle } x \geq y.$$

Nun wenden wir die Voraussetzung $M(z) = o(z)$ auf den 1. und 3. Summanden der Formel (4) an und lassen (bei festgehaltenem y) die Variable x gegen ∞ gehen. Man erhält

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|C(x)|}{x} \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus $C(x) = o(x)$, q.e.d.

Für unseren späteren Beweis des Primzahlsatzes reicht bisher bewiesene Implikation

$$m(x) = o(1) \implies \psi(x) \sim x$$

aus, der Rest dieses Paragraphen kann deshalb übersprungen werden. Es ist jedoch interessant, auch den Beweis der Umkehrung kennen zu lernen.

Wir führen als Zwischenschritt die weitere Aussage

$$(ii)' \quad H(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) \log n = o(x \log x).$$

ein und beweisen $(i) \Rightarrow (ii)' \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

$(i) \Rightarrow (ii)'$. Wir gehen aus von der Identität

$$\left(\frac{1}{\zeta(s)} \right)' = \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) \right) \frac{1}{\zeta(s)} + 1,$$

woraus die folgende Identität zwischen arithmetischen Funktionen folgt

$$-\mu \log = (\Lambda - 1) * \mu + \delta_1.$$

Daraus ergibt sich durch Summation aller Koeffizienten mit Index $\leq x$

$$-H(x) = -\sum_{n \leq x} \mu(n) \log n = \sum_{k \ell \leq x} (\Lambda(k) - 1) \mu(\ell) + 1.$$

Wir setzen $g(x) := \psi(x) - \lfloor x \rfloor$. Nach Voraussetzung (i) gilt $g(x) = o(x)$. Die obige Gleichung liefert mit dem Hyperbel-Trick für $1 \leq y \leq x$

$$-H(x) = 1 + \sum_{k \leq y} (\Lambda(k) - 1) M\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{\ell \leq x/y} \mu(\ell) g\left(\frac{x}{\ell}\right) - g(y) M\left(\frac{x}{y}\right).$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und y so groß gewählt, dass $|g(z)| \leq \varepsilon z$ für alle $z \geq y$. Dann lässt sich die zweite Summe wie folgt abschätzen:

$$\left| \sum_{\ell \leq x/y} \mu(\ell) g\left(\frac{x}{\ell}\right) \right| \leq \varepsilon x \sum_{\ell \leq x/y} \frac{1}{\ell} \leq \varepsilon x (\log x + 1).$$

Da trivialerweise $|M(x)| \leq x$, folgt daraus

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|H(x)|}{x \log x} \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann, heißt das $H(x) = o(x \log x)$, q.e.d.

(ii)' $\Leftrightarrow$ (ii). Wir wenden auf $H(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \log n$ die Abelsche partielle Summation an und erhalten

$$H(x) = M(x) \log x - \int_1^x \frac{M(t)}{t} dt = M(x) \log x + O(x).$$

Dies zeigt die Äquivalenz von $M(x) = o(x)$ und $H(x) = o(x \log x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei $x \geq 1$ eine reelle Zahl, L eine positive ganze Zahl und $z := Lx$. Wir gehen aus von der Formel $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1n}$. Summation über alle $n \leq z$ ergibt

$$1 = \sum_{k \ell \leq z} \mu(k) \cdot 1.$$

Mit dem Hyperbel-Trick zur Zerlegung $z = xL$ erhält man

$$1 = \sum_{k \leq x} \mu(k) \left\lfloor \frac{z}{k} \right\rfloor + \sum_{\ell \leq L} M\left(\frac{z}{\ell}\right) - M(x) \left\lfloor \frac{z}{x} \right\rfloor$$

Multipliziert man die Gleichung mit -1 und addiert auf beiden Seiten $\sum_{k \leq x} \mu(k) z/k$, ergibt sich

$$(5) \quad z \sum_{k \leq x} \frac{\mu(k)}{k} = 1 + \sum_{k \leq x} \mu(k) \left(\frac{z}{k} - \left\lfloor \frac{z}{k} \right\rfloor \right) - \sum_{\ell \leq L} M\left(\frac{z}{\ell}\right) + M(x)L.$$

Wir müssen nun die rechte Seite von (5) nach oben abschätzen. Trivialerweise ist

$$(6) \quad \left| \sum_{k \leq x} \mu(k) \left(\frac{z}{k} - \left\lfloor \frac{z}{k} \right\rfloor \right) \right| \leq x.$$

Um die restlichen zwei Terme abzuschätzen, setzen wir

$$\varepsilon(x) := \sup_{y \geq x} \frac{|M(y)|}{y}.$$

Die Funktion $\varepsilon(x)$ ist monoton fallend und nach Voraussetzung (ii) gilt $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Damit erhält man, da $z/\ell \geq x$,

$$(7) \quad \left| \sum_{\ell \leq L} M\left(\frac{z}{\ell}\right) \right| \leq \varepsilon(x) z \sum_{\ell \leq L} \frac{1}{\ell} \leq \varepsilon(x) z (\log L + 1)$$

und

$$(8) \quad |M(x)L| \leq \varepsilon(x)xL = \varepsilon(x)z.$$

Setzt man (6), (7), (8) in (5) ein und dividiert durch z , so kommt

$$(9) \quad |m(x)| = \left| \sum_{k \leq x} \frac{\mu(k)}{k} \right| \leq \frac{1}{xL} + \frac{1}{L} + \varepsilon(x)(\log L + 2).$$

Sei nun $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $L > 4/\delta$. Anschließend können wir x_0 so groß wählen, dass

$$\varepsilon(x_0) \leq \frac{\delta}{2(\log L + 2)}.$$

Dann folgt aus (9)

$$|m(x)| < \delta \quad \text{für alle } x \geq x_0.$$

Da $\delta > 0$ beliebig klein war, ist damit die Behauptung $m(x) = o(1)$ bewiesen.