2. Primzeta-Funktion. Summe der reziproken Primzahlen

2.1. Definition. Die *Primzeta-Funktion* ist für $\mathrm{Re}(s) > 1$ definiert durch

$$P(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}.$$

Dabei wird über alle Primzahlen p summiert.

Da die Reihe eine Teilreihe der Zeta-Reihe ist, konvergiert sie in jeder abgeschlossenen Halbebene $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1+\delta$, $\delta > 0$, gleichmäßig, stellt also eine in der Halbebene

$$H(1) = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$$

holomorphe Funktion dar.

2.2. Satz (Zusammenhang zwischen Zeta- und Primzeta-Funktion).
Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\log\zeta(s) = P(s) + F(s) \quad \textit{mit} \quad F(s) := \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k} P(ks).$$

Die Funktion F ist in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 1$ beschränkt.

Bemerkung. Da die Zetafunktion in der einfach zusammenhängenden Halbebene $H(1) = \{\mathrm{Re}(s) > 1\}$ holomorph und ungleich 0 ist, existiert dort ein holomorpher Zweig des Logarithmus von ζ. Wir wählen den Zweig, der auf dem Intervall $]1,\infty[\, \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (auf dem die Zetafunktion reell und positiv ist) reelle Werte annimmt.

Beweis. Logarithmieren des Euler-Produkts ergibt

$$\log\zeta(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \log\Big(\frac{1}{1-p^{-s}}\Big)$$

Unter Benutzung der Reihen-Entwicklung des Logarithmus

$$\log\Big(\frac{1}{1-z}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1$$

erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}\log\zeta(s) &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{kp^{ks}} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^{ks}} = P(s) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} P(ks).\end{aligned}$$

Kap. 2 zuletzt geändert am: 2011-06-12

Um die Beschränktheit von

$$F(s) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} P(ks)$$

in der Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$ zu beweisen, benutzen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |P(ks)| &\leqslant P(k\sigma) \leqslant P(k) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^k} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\ &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^k} = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

und erhalten für alle $s \in H(1)$

$$|F(s)| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1, \quad \text{q.e.d.}$$

2.3. Corollar. *Für $\sigma \searrow 1$ hat man die asymptotische Gleichheit*

$$P(\sigma) \sim \log \zeta(\sigma) \sim \log\Big(\frac{1}{\sigma - 1}\Big).$$

Insbesondere folgt

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Dies ist der Eulersche Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Die Tatsache $\sum_p 1/p = \infty$ sagt aber noch etwas mehr: Z.B. bedeutet sie, dass in einem gewissem Sinn die Primzahlen häufiger sind als die Quadratzahlen, denn $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$. In diesem Zusammenhang sei auf ein noch ungelöstes Problem hingewiesen:

> *Gibt es zwischen zwei auf einander folgenden Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$ stets eine Primzahl?*

Obwohl alle numerische Evidenz dafür spricht, scheint es sehr schwer zu sein, dies zu beweisen.

Wir wollen nun genauer untersuchen, wie schnell $\sum_{p \leqslant x} 1/p$ gegen ∞ strebt. Es sei daran erinnert, dass

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \sim \log x \quad \text{für } x \to \infty.$$

Wir werden zeigen, dass

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \sim \log \log x \quad \text{für } x \to \infty.$$

Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen.

2.4. Satz (Legendre). *Für die Primfaktor-Zerlegung der Fakultät gilt*

$$n! = \prod_{p \leqslant x} p^{r_p(n)} \quad \textit{mit} \quad r_p(n) = \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Bemerkung. Die Summe ist natürlich endlich, denn $\lfloor n/p^k \rfloor = 0$ für $p^k > n$.

Beweis. Die Anzahl der Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$, die durch p teibar sind, ist gleich $\lfloor n/p \rfloor$. Davon sind $\lfloor n/p^2 \rfloor$ sogar durch p^2 teilbar, $\lfloor n/p^3 \rfloor$ durch p^3, usw. Daraus folgt die Behauptung.

2.5. Lemma. *Für alle natürlichen Zahlen N gilt*

$$\prod_{p \leqslant N} p < 4^N.$$

Beweis. Wir betrachten für $n \geqslant 2$ den Binomialkoeffizienten

$$\binom{2n-1}{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-2) \cdot \ldots \cdot (n+1)}{(n-1)!}$$

Für jede Primzahl p mit $n+1 \leqslant p \leqslant 2n-1$ gilt $p \mid \binom{2n-1}{n-1}$, da p den Zähler teilt, aber nicht den Nenner. Also folgt

$$\prod_{n<p<2n} p \leqslant \binom{2n-1}{n-1}.$$

Da $\binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$ beide in der Binomialformel für

$$(1+1)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = 2^{2n-1}$$

vorkommen, gilt $\binom{2n-1}{n-1} \leqslant 2^{2n-2}$, also folgt

$$\prod_{n<p<2n} p \leqslant 4^{n-1}.$$

Wir beweisen jetzt die Behauptung des Lemmas

$$G(N) := \prod_{p \leqslant N} p < 4^N$$

durch vollständige Induktion nach N. Die Behauptung ist klar für $N \leqslant 2$. Sei also jetzt $N > 2$ und die Behauptung schon bewiesen für alle $N' < N$. Der Fall N gerade ist trivial, da dann $G(N) = G(N-1)$. Sei nun $N = 2n-1$ ungerade. Nach Induktions-Voraussetzung ist $P(n) < 4^n$. Daraus folgt

$$G(2n-1) = G(n) \prod_{n<p\leqslant 2n-1} p < 4^n 4^{n-1} = 4^{2n-1}, \quad \text{q.e.d.}$$

2.6. Corollar. *Für alle $x \geqslant 1$ gilt*

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p < x \log 4,$$

insbesondere $\vartheta(x) = O(x)$.

Bemerkung. Es ist $\log 4 = 1.386294\ldots$.

2.7. Satz. *Für $x \to \infty$ gilt*

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Beweis. Da $\int \log x\, dx = x(\log x - 1)$, gilt

$$(1) \qquad \sum_{n \leqslant x} \log n = x \log x + O(x).$$

Andrerseits folgt aus dem Satz 2.4 von Legendre

$$(2) \qquad \sum_{n \leqslant x} \log n = \sum_{p \leqslant x} \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \log p = \sum_{p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \log p + \sum_{p \leqslant x} \sum_{k \geqslant 2} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \log p$$

Für die erste Summe auf der rechten Seite gilt wegen Corollar 2.6

$$(3) \qquad \sum_{p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \log p = x \sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} + O(x).$$

Für die zweite Summe auf der rechten Seite von (2) gilt

$$(4) \qquad 0 \leqslant \sum_{p \leqslant x} \sum_{k \geqslant 2} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \log p \leqslant x \sum_{p} \sum_{k \geqslant 2} \frac{\log p}{p^k} = x \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)} = O(x),$$

da $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{\log n}{n(n-1)}<\infty$. Setzt man (3) und (4) in (2) ein und kürzt durch x, erhält man

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\log n=\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p}+O(1).$$

Zusammen mit (1) folgt die Behauptung.

2.8. Satz. *Es gibt eine Konstante $\beta\in\mathbb{R}$, so dass*

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\log\log x+\beta+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass

$$\beta:=\gamma-\sum_{p}\Big\{\log\Big(\frac{1}{1-1/p}\Big)-\frac{1}{p}\Big\}$$

Die unendliche Reihe konvergiert, da

$$0<\log\Big(\frac{1}{1-1/p}\Big)-\frac{1}{p}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp^k}<\frac{1}{p^2}.$$

Es gilt $\beta=0.261497\ldots$.

Beweis. Nach (a) ist

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p}=\log x+r(x)\quad\text{mit}\quad r(x)=O(1).$$

Wegen $\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{1}{\log t}\Big)=\dfrac{-1}{t\log^2 t}$ erhalten wir daraus mit Abelscher partieller Summation

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}&=\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p}\frac{1}{\log p}\\&=\frac{\log x+r(x)}{\log x}+\int_2^x\frac{dt}{t\log t}+\int_2^x\frac{r(t)dt}{t\log^2 t}\\&=1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)+\log\log x-\log\log 2+\int_2^x\frac{r(t)dt}{t\log^2 t}\end{aligned}$$

Die Funktion $1/t\log^2 t$ ist über das unendliche Intervall $[2,\infty]$ integrierbar, also können wir schreiben

$$\int_2^x\frac{r(t)dt}{t\log^2 t}=\int_2^\infty\frac{r(t)dt}{t\log^2 t}-\int_x^\infty\frac{r(t)dt}{t\log^2 t}$$

$$= \int_2^\infty \frac{r(t)dt}{t\log^2 t} + O\Big(\int_x^\infty \frac{dt}{t\log^2 t}\Big) = \int_2^\infty \frac{r(t)dt}{t\log^2 t} + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

Setzen wir dies oben ein, erhalten wir insgesamt

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + \beta + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)$$

mit

$$\beta = 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{r(t)dt}{t\log^2 t}.$$

Damit ist Satz 2.8 bewiesen.

Bemerkung. Die Funktion $x \mapsto \log\log x$ wächst sehr langsam. Z.B. ist

$$\begin{aligned}
\log\log 1000 &\approx 1.932\ldots,\\
\log\log 10^6 &\approx 2.625\ldots,\\
\log\log 10^{10} &\approx 3.136\ldots,\\
\log\log 10^{100} &\approx 5.439\ldots.
\end{aligned}$$