Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
7. Februar 2020

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Lösung der Klausuraufgaben

Aufgabe 1

Sei $\Lambda := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \subset \mathbb{C}$ das Quadrat-Gitter. Für die Weierstraßsche $\wp$-Funktion $\wp_\Lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ zum Gitter Λ zeige man

$$\wp_\Lambda(iz) = -\wp_\Lambda(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Lösung

Die Abbildung $z \mapsto iz$ bildet das Gitter $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ bijektiv auf sich selbst ab. Deshalb ist die Funktion $f(z) := \wp_\Lambda(iz)$ eine bzgl. Λ doppelt-periodische meromorphe Funktion mit Polen 2. Ordnung in den Gitterpunkten und holomorph in $\mathbb{C} \smallsetminus \Lambda$. Wir untersuchen die Laurent-Entwicklung von $\wp_\Lambda(iz)$ um den Nullpunkt. Die Laurent-Entwicklung von $\wp_\Lambda(z)$ hat bekanntlich die Gestalt

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + O(z^2),$$

wobei $O(z^2)$ für eine Taylorreihe steht, die nur Glieder der Ordnung 2 oder höher enthält. Daraus folgt

$$\wp_\Lambda(iz) = \frac{-1}{z^2} + O(z^2).$$

Wir betrachten nun die Funktion $F(z) := \wp_\Lambda(z) + \wp_\Lambda(iz)$. Dies ist eine doppelt-periodische Funktion, die überall holomrph ist, da sich für die Laurent-Reihe von $F(z)$ im Nullpunkt ergibt

$$F(z) = O(z^2),$$

die Polstellen bei 0 und wegen der Doppel-Periodizität auch in allen anderen Gitterpunkten heben sich also auf. Da nach dem Satz von Liouville eine doppelt-periodische holomorphe Funktion konstant ist, ist $F(z)$ konstant; wegen $F(0) = 0$ ist $F(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. $\wp_\Lambda(iz) = -\wp_\Lambda(z)$, q.e.d.

Eine andere Lösungs-Möglichkeit macht Gebrauch von der genaueren Gestalt der $\wp$-Funktion

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Durchläuft ω alle Elemente von $\Lambda \setminus 0$, so durchläuft auch $i\omega$ alle Elemente von $\Lambda \setminus 0$, daher gilt

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \Big(\frac{1}{(z - i\omega)^2} - \frac{1}{(i\omega)^2} \Big),$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \wp_\Lambda(iz) &= \frac{1}{(iz)^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \Big(\frac{1}{(iz - i\omega)^2} - \frac{1}{(i\omega)^2} \Big) \\ &= \frac{-1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \Big(\frac{-1}{(z - \omega)^2} - \frac{-1}{\omega^2} \Big) \\ &= -\wp_\Lambda(z), \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 2

Sei $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ die algebraische Kurve, deren afffiner Teil durch die Gleichung

$$C_{\text{aff}} : \; Y^2 = X^4 - 1$$

gegeben wird.

a) Man berechne den Schnitt von C mit der unendlich fernen Geraden.

b) Man bestimme alle singulären Punkte von C.

Lösung

a) Die Homogenisierung der affinen Kurvengleichung $Y^2 - X^4 + 1 = 0$ lautet

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_2^2 x_0^2 - x_1^4 + x_0^4 = 0.$$

Der Schnitt mit der unendlich-fernen Geraden $g_\infty = \{x_0 = 0\}$ ergibt

$$x_1^4 = 0, \quad \text{also} \quad x_1 = 0.$$

Der Wert der Koordinate x_2 ist beliebig ($\neq 0$). Da es aber auf einen gemeinsamen Faktor $\neq 0$ nicht ankommt, dürfen wir $x_2 = 1$ setzen. Der Schnitt der Kurve C mit g_∞ besteht also aus einem einzigen Punkt

$$S := (0 : 0 : 1).$$

b) Die singulären Punkte von C sind die gemeinsamen Nullstellen von F und den Ableitungen $\dfrac{\partial F}{\partial x_0}, \dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F}{\partial x_2}$. Man berechnet

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_0} = 2x_2^2 x_0 + 4x_0^3, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = -4x_1^3, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 x_0^2. \end{cases}$$

i) Betrachten wir zunächst die endlichen Punkte in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \smallsetminus g_\infty$. Hier darf $x_0 = 1$ gesetzt werden. Die Gleichungen $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0$ und $\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ liefern

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 0.$$

Der Punkt $(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : 0 : 0)$ liegt aber nicht auf der Kurve, da $F(1, 0, 0) = 1$. Also gibt es im Affinen keinen singulären Punkt.

ii) Setzt man die Koordinaten des unendlich fernen Punktes $S = (0 : 0 : 1) \in C$ in die Ableitungen $(*)$ ein, erhält man

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \Bigg|_S = (0, 0, 0).$$

Daher ist S der einzige singuläre Punkt der Kurve C.

Aufgabe 3

Sei Λ das Gitter $\Lambda := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot 2i$. Weiter seien folgende Punkte gegeben:

$$Q_1 := 0, \quad Q_2 := \tfrac{1}{2} + i, \quad P_1 := \tfrac{1}{3} + i.$$

Man beweise: Es gibt eine bzgl. Λ doppelt-periodische meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$, die modulo Λ genau in den Punkten Q_1 und Q_2 Pole erster Ordnung hat und in P_1 sowie einem weiteren Punkt P_2 Nullstellen erster Ordnung.
Man berechne den Punkt P_2. Ist er (modulo Λ) eindeutig bestimmt?

Lösung

Dass es noch einen weiteren Punkt mit einer Nullstelle erster Ordnung geben muss, folgt daraus, dass eine Λ-doppelt-periodische meromorphe Funktion modulo Λ ebenso viele Nullstellen wie Pole besitzt (gerechnet mit Vielfachheiten). Der Divisor der gesuchten Funktion f lautet

$$D = [P_1] + [P_2] - [Q_1] - [Q_2].$$

Damit eine Funktion mit diesem Divisor existiert, ist notwendig und hinreichend, dass $\mathrm{sum}(D) \equiv 0 \bmod \Lambda$, d.h.

$$(\tfrac{1}{3} + i) + P_2 - 0 - (\tfrac{1}{2} + i) \equiv 0 \bmod \Lambda.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$P_2 \equiv (\tfrac{1}{2} + i) - (\tfrac{1}{3} + i) \equiv \tfrac{1}{6} \bmod \Lambda.$$

Also hat die Funktion f in $P_2 = \frac{1}{6}$ ihre zweite Nullstelle erster Ordnung. Die Herleitung zeigt, dass P_2 modulo Λ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Gitter besitzen komplexe Multiplikation?

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &:= \mathbb{Z}\cdot(1+i) \ + \ \mathbb{Z}\cdot(2+i),\\
\Lambda_2 &:= \mathbb{Z}\cdot(1+i\sqrt{2}) \ + \ \mathbb{Z}\cdot(2+i\sqrt{2}),\\
\Lambda_3 &:= \mathbb{Z}\cdot(1+\sqrt{2}) \ + \ \mathbb{Z}\cdot i.
\end{aligned}$$

Die Antwort ist zu begründen.

Lösung

1) Das Gitter Λ_1 ist äquivalent zu $\Lambda_1' = \mathbb{Z} + \tau_1$ mit

$$\tau_1 = \frac{2+i}{1+i} = \tfrac{1}{2}(2+i)(1-i) = \tfrac{1}{2}(1+3i).$$

Da $\mathbb{Q}(\tau_1) = \mathbb{Q}(i)$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper ist, besitzt Λ_1', also auch Λ_1 komplexe Multiplikation.

2) Das Gitter Λ_2 ist äquivalent zu $\Lambda_2' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ mit

$$\tau_2 = \frac{2+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}} = \tfrac{1}{3}(2+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2}) = \tfrac{1}{3}(4-i\sqrt{2}).$$

Da $\mathbb{Q}(\tau_2) = \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper ist, besitzt Λ_2', also auch Λ_2 komplexe Multiplikation.

3) Das Gitter Λ_3 ist äquivalent zu $\Lambda_3' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_3$ mit

$$\tau_3 = \frac{i}{1+\sqrt{2}} = -i(1-\sqrt{2}) = -i + i\sqrt{2}.$$

Behauptung. Der Körper $K := \mathbb{Q}(\tau_3) = \mathbb{Q}(-i+i\sqrt{2})$ ist kein quadratischer Zahlkörper.

Zum *Beweis* dafür zeigen wir, dass τ_3 keiner quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt. Es gilt

$$\tau_3^2 = (-i)^2(1-\sqrt{2})^2 = -(1-2\sqrt{2}+2) = -3+2\sqrt{2}.$$

Angenommen, es gäbe $c_0, c_1 \in \mathbb{Q}$ mit

$$0 = \tau_3^2 + c_1\tau_3 + c_0 = -3 + 2\sqrt{2} - ic_1(1-\sqrt{2}) + c_0.$$

Dann müsste insbesondere der Realteil der rechten Seite gleich 0 sein, d.h.

$$-3 + 2\sqrt{2} + c_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} = \tfrac{1}{2}(3-c_0).$$

Da $c_0 \in \mathbb{Q}$, hieße das, dass $\sqrt{2}$ rational ist, Widerspruch!

Also ist $\mathbb{Q}(\tau_3)$ kein imaginär-quadratischer Zahlkörper, daher besitzt Λ_3 keine komplexe Multiplikation.
