MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

WS 2019/20
11. Dez. 2019

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 7

Aufgabe 25

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und

$$\sigma : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda, \quad z \mapsto \sigma(z) := -z,$$

die Punktspiegelung am Nullpunkt. σ operiert auch auf der Gruppe der Divisoren $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$: Für $D = \sum_{i=1}^n k_i[P_i] \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ setzt man $\sigma(D) := \sum_{i=1}^n k_i[\sigma(P_i)]$. Ein Divisor $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ heißt σ-invariant oder kurz symmetrisch, wenn $\sigma(D) = D$. Man zeige:

a) Der Divisor einer nicht identisch verschwindenden meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ ist genau dann symmetrisch, wenn f eine gerade oder eine ungerade Funktion ist.

b) Wie kann man an einem symmetrischen Hauptdivisor $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ erkennen, ob er zu einer geraden oder einer ungeraden Funktion gehört?

Aufgabe 26

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit zugehöriger $\wp$-Funktion $\wp := \wp_\Lambda$ und $e_2 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$. Man zeige:

a) Die Funktion $\wp - e_2$ besitzt eine bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte Quadratwurzel, d.h. es gibt eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ mit $f^2 = \wp - e_2$. Diese Funktion erfüllt die Beziehungen

$$f(z + \omega_1) = -f(z), \quad f(z + \omega_2) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

d.h. f ist doppelt-periodisch bzgl. des Gitters $\Lambda_1 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$.

Hinweis. Man betrachte den Divisor einer hypothetischen Wurzel von $\wp - e_2$ und zeige, dass er ein Hauptdivisor auf $\mathbb{C}/\Lambda_1$ ist.

b) Die Funktion f ist ungerade und genügt der Differentialgleichung

$$f'(z)^2 = (f(z)^2 - \lambda_1^2)(f(z)^2 - \lambda_2^2)$$

mit gewissen, von ω_1 und ω_2 abhängigen Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_1 \neq \pm\lambda_2$.

---

b.w.

Aufgabe 27

Sei $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter ($\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ reell-linear unabhängig).

a) Sei $\Lambda_1 \subset \Lambda$ das Untergitter $\Lambda_1 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + 3\mathbb{Z}\omega_2$. Man bestimme eine Basis ω_1', ω_2' von Λ, so dass $\Lambda_1 = \mathbb{Z}\omega_1' + 6\mathbb{Z}\omega_1'$.

b) Sei $\Lambda_2 \subset \Lambda$ das Untergitter $\Lambda_2 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + 4\mathbb{Z}\omega_2$. Man zeige: Es gibt keine Basis ω_1', ω_2' von Λ, so dass $\Lambda_2 = \mathbb{Z}\omega_1' + 8\mathbb{Z}\omega_1'$.

Aufgabe 28

Sei $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, $\wp$ die zugehörige Weierstraßsche $\wp$-Funktion und

$$e_j := \wp\Big(\frac{\omega_j}{2}\Big), \quad j = 1, 2, 3, \quad \omega_3 := \omega_1 + \omega_2.$$

Für eine weitere $\mathbb{Z}$-Basis ω_1', ω_2' von Λ sei analog

$$e_j' := \wp\Big(\frac{\omega_j'}{2}\Big), \quad j = 1, 2, 3.$$

Man zeige:

a) (e_1', e_2', e_3') ist eine Permutation von (e_1, e_2, e_3).

b) Jede Permutation von (e_1, e_2, e_3) kann so durch eine geeignete Wahl einer Basis ω_1', ω_2' von Λ erhalten werden.