Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
4. Dez. 2019

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 6

Aufgabe 21

Für die arithmetischen Funktionen $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$ (vgl. Aufgabe 6) beweise man folgende Identität:

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m).$$

Hinweis. Man verwende die Aufgaben 6 und 13, sowie die Formeln

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Aufgabe 22

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter. Die Weierstraßsche Zetafunktion zum Gitter Λ (nicht zu verwechseln mit der Riemannschen Zetafunktion!) ist definiert durch

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{0\neq\omega\in\Lambda} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$$

a) Man zeige, dass die Reihe auf $\mathbb{C}$ kompakt konvergiert (d.h. für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ haben nur endlich viele Summanden einen Pol in K und der Rest konvergiert gleichmäßig auf K). Somit stellt $\zeta(z)$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion dar, die genau in den Gitterpunkten $\omega \in \Lambda$ Pole 1. Ordnung hat.

b) Mit den Konstanten $\eta_\nu := 2\zeta(\omega_\nu/2)$, $\nu = 1, 2$, gilt

$$\zeta(z + \omega_\nu) = \zeta(z) + \eta_\nu \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \quad \nu = 1, 2.$$

Hinweis. Man benutze $\zeta'(z) = -\wp(z)$ mit der Weierstraßschen $\wp$-Funktion zum Gitter Λ.

Aufgabe 23

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter. Seien $a_1, \ldots, a_n$ parweise modulo Λ inäquivalente Punkte. In jedem Punkt a_ν sei ein Hauptteil

$$H_\nu(z) := \sum_{k=1}^{m_\nu} \frac{c_{\nu,k}}{(z-a_\nu)^k}$$

vorgegeben.

---

b.w.

Man beweise: Genau dann gibt es eine bzgl. Λ doppelt-periodische meromorphe Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$, die modulo Λ genau in den Punkten a_ν Pole mit den Hauptteilen $H_\nu(z)$ hat, wenn die Summe der Residuen gleich 0 ist, d.h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu,1} = 0.$$

Aufgabe 24

Sei J eine abzählbar unendliche Index-Menge und seien $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganze holomorphe Funktionen. Das Produkt

$$F(z) := \prod_{j \in J} (1 + f_j(z))$$

heißt *normal konvergent*, wenn für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{j \in J} \|f_j\|_K < \infty \quad \text{mit} \quad \|f_j\|_K := \sup\{|f_j(z)| : z \in K\}.$$

Für ein Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ist die Weierstraßsche σ-Funktion definiert durch

$$\sigma(z) := z \cdot \prod_{0 \neq \omega \in \Lambda} \Big(1 - \frac{z}{\omega}\Big) \cdot \exp\Big(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\Big).$$

Man beweise:

a) Das Produkt konvergiert normal gegen eine ganze holomorphe Funktion $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die genau in den Gitterpunkten $\omega \in \Lambda$ Nullstellen 1. Ordnung hat.

b) $\sigma(z)$ ist eine Thetafunktion, d.h. es gibt affin-lineare Funktionen $L_\omega(z) = a_\omega z + b_\omega$, so dass

$$\sigma(z + \omega) = \sigma(z) e^{L_\omega(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und } \omega \in \Lambda.$$
