Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
18. Okt. 2019

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und sei $\Gamma \subset (V, +)$ eine diskrete Untergruppe. Man beweise: Es gibt eine natürliche Zahl $m \leqslant n$ und linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$, so dass

$$\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \ldots + \mathbb{Z}v_m.$$

(Falls $m = 0$, ist die Summe leer, d.h. $\Gamma = \{0\}$).

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion in der oberen Halbebene $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ mit der Periode 1 und Fourierreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}.$$

Man beweise:
Genau dann gilt $c_n = 0$ für alle $n < 0$, falls es Konstanten $M, y_0 > 0$ gibt, so dass

$$|f(z)| \leqslant M \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{H} \text{ mit } \operatorname{Im}(z) \geqslant y_0.$$

Aufgabe 3

a) Man zeige: Die Funktion

$$\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

ist eine meromorphe Funktion in der komplexen Ebene mit der Periode 1. Ihre einzigen Singularitäten sind Pole 1. Ordnung an den Stellen $n \in \mathbb{Z}$.

b) Man entwickle die Funktion $\cot \pi z$ in eine Fourierreihe

i) $f_+(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ in der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$,

ii) $f_-(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i n z}$ in der unteren Halbebene $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}$.

In welchen Punkten der reellen Achse konvergieren die Fourierreihen f_+ bzw. f_- ?

---

b.w.

Aufgabe 4

Für das Gitter $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$, $(\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\})$,
und eine ganze Zahl $k \geqslant 2$ betrachte man die *Eisenstein-Reihe*

$$G_{2k}(\tau) := \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$$

Man beweise:

a) $\qquad G_{2k}(\tau+1) = G_{2k}(\tau)$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$.

b) Für $\tau \in \mathbb{H}$ ist auch $-1/\tau \in \mathbb{H}$ und es gilt

$$G_{2k}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{2k} G_{2k}(\tau)$$

c) Es gilt

$$\lim_{\operatorname{Im}(\tau)\to\infty} G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k), \quad \text{wobei} \quad \zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$
