Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
15. Dez. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 7, Lösungen

Aufgabe 25

Es seien $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ und $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ zwei Dirichletreihen.
Für $s = s_0$ seien beide Reihen konvergent, die Reihe $f(s_0)$ sogar absolut. Man zeige, dass die Produktreihe $f(s)g(s)$ im Punkt $s = s_0$ konvergiert.

Lösung

O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass $g(s_0) = 0$ (falls dies noch nicht der Fall ist, genügt es, den Koeffizien b_1 geeignet abzuändern).
Weiter dürfen wir annehmen, dass $s_0 = 0$ ist (sonst betrachte man $\tilde{f}(s) := f(s_0 + s)$ und $\tilde{g}(s) := g(s_0 + s)$).

Wir setzen also voraus, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, und dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gegen 0 konvergiert (nicht notwendig absolut). Sei

$$c_n := \sum_{k\ell=n} a_k b_\ell.$$

Es ist zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ gegen 0 konvergiert. Wir setzen

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| =: A \in \mathbb{R}_+.$$

Da die Reihe $\sum b_n$ gegen 0 konvergiert, gibt es eine Konstante $B > 0$, so dass

$$(2) \qquad \Big|\sum_{n\leqslant x} b_n\Big| \leqslant B \quad \text{für alle } x > 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{A+B}$. Wegen der Konvergenz von $\sum |a_n|$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$(3) \qquad \sum_{n>x} |a_n| < \varepsilon' \quad \text{für alle } x \geqslant x_0.$$

Nach evtl. Vergrößerung von x_0 haben wir außerdem

$$(4) \qquad \Big|\sum_{n\leqslant x} b_n\Big| < \varepsilon' \quad \text{für alle } x \geqslant x_0.$$

Behauptung.

$$(*) \qquad \Big|\sum_{n\leqslant x} c_n\Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \geqslant x_1 := x_0^2.$$

Beweis hierfür.

$$\sum_{n\leqslant x} c_n = \sum_{k\ell\leqslant x} a_k b_\ell = \underbrace{\sum_{k\leqslant\sqrt{x}} a_k \sum_{\ell\leqslant x/k} b_\ell}_{=:\, S_1} + \underbrace{\sum_{k>\sqrt{x}} a_k \sum_{\ell\leqslant x/k} b_\ell}_{=:\, S_2}.$$

Wir schätzen nun die Summen S_1 und S_2 einzeln ab.

$$\begin{aligned}
|S_1| &\leqslant \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} |a_k|\cdot\Big|\sum_{\ell\leqslant x/k} b_\ell\Big| \\
&\leqslant \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} |a_k|\cdot\varepsilon' \qquad [\text{wegen (4), da } x/k \geqslant \sqrt{x} \geqslant \sqrt{x_1} = x_0] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\cdot\varepsilon' = A\varepsilon' \quad [\text{wegen (1)}].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|S_2| &\leqslant \sum_{k>\sqrt{x}} |a_k|\cdot\Big|\sum_{\ell\leqslant x/k} b_\ell\Big| \\
&\leqslant \sum_{k>\sqrt{x}} |a_k|\cdot B < B\varepsilon' \qquad [\text{wegen (2) und (3)}]
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man für $x \geqslant x_1$

$$\Big|\sum_{n\leqslant x} c_n\Big| \leqslant |S_1| + |S_2| < (A+B)\varepsilon' = \varepsilon.$$

Damit ist $(*)$ bewiesen. Daraus folgt die Behauptung der Aufgabe 25.

Aufgabe 26

Sei $m \geqslant 2$ eine natürliche Zahl. Ein *Dirichlet-Charakter* modulo m ist eine Abbildung $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\chi(n_1) = \chi(n_2)$, falls $n_1 \equiv n_2 \bmod m$.

(ii) $\chi(n) \neq 0$ genau dann, wenn $\gcd(n, m) = 1$.

(iii) $\chi(k\ell) = \chi(k)\chi(\ell)$ für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Die *Dirichletsche L-Reihe* zum Charakter χ ist definiert als

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Man beweise:

a) Die Reihe konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut, stellt also eine in der Halbebene $H(1) := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ holomorphe Funktion dar.

b) Der *Hauptcharakter* $\chi_{0,m}$ modulo m ist definiert durch $\chi_{0,m}(n) = 1$ für alle n mit $\gcd(n, m) = 1$. Es gilt

$$L(s, \chi_{0,m}) = \prod_{p|m} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)\, \zeta(s).$$

Das Produkt ist dabei über alle Primteiler von m zu erstrecken.

c) Für jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ konvergiert die Reihe $L(s, \chi)$ sogar für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Anleitung. Man beweise dazu $\displaystyle\sum_{n \leqslant x} \chi(n) = O(1)$.

Lösung

Vorbemerkung. Die Dirichlet-Charaktere modulo m stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu Gruppen-Homomorphismen

$$\chi : (\mathbb{Z}/m)^* \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

Da $(\mathbb{Z}/m)^*$ eine endliche Gruppe der Ordnung $\varphi(m)$ ist, gilt für jedes Element $\xi \in (\mathbb{Z}/m)^*$, dass $\xi^{\varphi(m)} = 1$, also auch $\chi(\xi)^{\varphi(m)} = 1$. Insbesondere folgt daraus $|\chi(\xi)| = 1$.

a) Da $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{\chi(n)}{n^s}\Big| = \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ \gcd(n,m)=1}} \frac{1}{n^\sigma},$

folgt die Behauptung aus der entsprechenden Aussage über die Zetafunktion.

b) Es ist $\displaystyle L(s, \chi_{0,m}) = \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ \gcd(n,m)=1}} \frac{1}{n^\sigma}$

Sei $m = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$, ($p_j$ paarweise verschiedene Primzahlen, $k_j \geqslant 1$). Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über die Anzahl r der verschiedenen Primfaktoren von m.

Induktionsanfang $r = 1$. Dann ist $m = p^k$ eine Primzahlpotenz. Es gilt

$$\frac{1}{p^s}\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(pn)^s} = \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ p|n}} \frac{1}{n^s}, \qquad \text{also}$$

$$\Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)\zeta(s) = \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ p \nmid n}} \frac{1}{n^s}.$$

Die Bedingung $p \nmid n$ ist aber gleichbedeutend mit $\gcd(p^k, n) = 1$.

Induktionsschritt $(r - 1) \to r$. Es sei schon bewiesen, dass

$$F_{r-1}(s) := \prod_{j=1}^{r-1} \Big(1 - \frac{1}{p_j^s}\Big)\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \Big\{\frac{1}{n^s} : \gcd(p_1^{k_1} \cdots p_{r-1}^{k_{r-1}}, n) = 1\Big\}.$$

Diese Notation soll bedeuten, dass über alle natürlichen Zahlen n summiert wird, die zu $p_1^{k_1} \cdots p_{r-1}^{k_{r-1}}$ teilerfremd sind. Jetzt ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p_r^s} F_{r-1}(s) &= \sum_{n \geqslant 1} \Big\{ \frac{1}{(p_r n)^s} : \gcd(p_1^{k_1} \cdots p_{r-1}^{k_{r-1}}, n) = 1 \Big\} \\
&= \sum_{n \geqslant 1} \Big\{ \frac{1}{n^s} : \gcd(p_1^{k_1} \cdots p_{r-1}^{k_{r-1}}, n) = 1 \text{ und } p_r \mid n \Big\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{p_j^s}\Big) \zeta(s) &= \Big(1 - \frac{1}{p_r^s}\Big) F_{r-1}(s) \\
&= \sum_{n \geqslant 1} \Big\{ \frac{1}{n^s} : \gcd(p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}, n) = 1 \Big\} \\
&= L(s, \chi_{0,m}), \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Bemerkung. Der Vorfaktor $\Phi_m(s) := \prod_{p|m} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big) = \prod_{p|m} \big(1 - e^{-s \log p}\big)$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, d.h. die L-Reihe

$$L(s, \chi_{0,m}) = \Phi_m(s) \zeta(s)$$

lässt sich ebenso wie die Zetafunktion analytisch in die ganze komplexe Ebene $\mathbb{C}$ fortsetzen. Die Fortsetzung ist holomorph in $\mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$ und hat einen Pol 1. Ordnung an der Stelle $s = 1$.

c) Sei χ ein vom Hauptcharkter verschiedener Dirichlet-Charakter modulo m. Wir können χ als Homomorphismus $\chi : (\mathbb{Z}/m)^* \to \mathbb{C}^*$ interpretieren. Es gibt gibt ein $\xi_0 \in (\mathbb{Z}/m)^*$ mit $\chi(\xi_0) \neq 1$. Nun ist

$$\sum_{\xi \in (\mathbb{Z}/m)^*} \chi(\xi) = \sum_{\xi \in (\mathbb{Z}/m)^*} \chi(\xi_0 \xi) = \chi(\xi_0) \sum_{\xi \in (\mathbb{Z}/m)^*} \chi(\xi).$$

Da $\chi(\xi_0) \neq 1$ folgt daraus

$$\sum_{\xi \in (\mathbb{Z}/m)^*} \chi(\xi) = 0.$$

Das bedeutet

$$\sum_{n=1}^{km} \chi(n) = k \sum_{n=1}^{m} \chi(n) = 0 \qquad \text{für alle } k \geqslant 0.$$

Für ein beliebiges reelles $x > 1$ sei $k := \lfloor x/m \rfloor$. Dann ist $0 \leqslant x - km < m$, also

$$\Big| \sum_{n \leqslant x} \chi(n) \Big| = \Big| \sum_{km < n \leqslant x} \chi(n) \Big| < m.$$

Dies beweist $\sum_{n\leqslant x}\chi(n)=O(1)$. Daraus folgt aus einem Satz der Vorlesung, dass die Reihe

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

für $\mathrm{Re}(s)>0$ konvergiert und dort holomrph ist.

Aufgabe 27 (Fortsetzung von Aufgabe 26)

Für einen beliebigen Dirichlet-Charakter χ modulo m gilt für $\mathrm{Re}(s)>1$

a) $$\frac{1}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}.$$

b) $$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}.$$

c) $$\log L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda_1(n)\chi(n)}{n^s},\quad \text{wobei}\quad \Lambda_1(n)=\begin{cases}1/k, & \text{falls } n=p^k,\ p \text{ prim},\ k\geqslant 1,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

d) $$\log L(s,\chi)=\sum_{p}\frac{\chi(p)}{p^s}+F(s),\quad \text{wobei } F(s) \text{ in } \{\mathrm{Re}(s)>\tfrac{1}{2}\} \text{ holomorph ist.}$$

Lösung

a) Es genügt zu zeigen, dass das Dirichlet-Produkt der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}\quad \text{und}\quad L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

gleich der Konstanten 1 ist. Dies sieht man so:

$$\sum_{k\ell=n}(\mu(k)\chi(k))\chi(\ell)=\chi(n)\sum_{k\ell=n}\mu(k)=\chi(n)\delta_{1,n}=\begin{cases}1 & \text{für } n=1,\\ 0 & \text{für } n>1.\end{cases}$$

Bemerkung. Da die Reihe von $1/L(s,\chi)$ für $\mathrm{Re}(s)>1$ konvergiert, folgt, dass $L(s,\chi)\neq 0$ für $\mathrm{Re}(s)>1$.

b) Da $L'(s,\chi) = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)\log n}{n^s}$, ergibt sich die Behauptung durch Berechnung des Dirichlet-Produkts der Reihen

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)\log n}{n^s}\quad \text{und}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}$$

unter Benutzung der Tatsache, dass $\sum_{k\ell=n}\log(k)\mu(\ell)=\Lambda(n)$. Dies wiederum folgt mit dem Möbiusschen Umkehrsatz aus $\sum_{d|n}\Lambda(d)=\log n$.

c) Wir setzen $f(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda_1(n)\chi(n)}{n^s}$. Damit ist

$$f'(s) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{\log(n)\Lambda_1(n)\chi(n)}{n^s} = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} = \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{d}{ds}\log L(s,\chi).$$

Da also die Ableitung von $f(s) - \log L(s,\chi)$ verschwindet, gilt

$$f(s) = \log L(s,\chi) + \text{const.}$$

Die Konstante muss aber gleich 0 sein, wie man durch Grenzwert-Betrachtung für $\mathrm{Re}(s) \to \infty$ erkennt.

d) Aus der Definition von $\Lambda_1(n)$ ergibt sich

$$\log L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)\chi(n)}{n^s} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_p \frac{\chi(p)^k}{p^{ks}}}_{=:\,F(s)}.$$

Es muss also nur noch gezeigt werden, dass der Reihenrest $F(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ holomorph ist. Dazu zeigen wir, dass die Reihe für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ sogar absolut konvergiert.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_p \left|\frac{\chi(p)^k}{p^{ks}}\right| \leqslant \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\sigma}} = \frac{1}{1-2^{-\sigma}} \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} \leqslant \frac{2^\sigma}{2^\sigma - 1} \cdot \zeta(2\sigma).$$

Da $2\sigma = 2\mathrm{Re}(s) > 1$, folgt die Behauptung.

Aufgabe 28 (Fortsetzung von Aufgabe 27)

Sei speziell $m = 4$. Man beweise:

a) Es gibt genau einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ. Für diesen gilt

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ +1, & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 4, \\ -1, & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

b) $$L(1,\chi) = \frac{\pi}{4}.$$

c) $$\sum_{p\leqslant x} \frac{\chi(p)}{p} = O(1) \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \Bigg(\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 4\\ p\leqslant x}} \frac{1}{p}\Bigg) \Bigg/ \Bigg(\sum_{\substack{p\equiv 3 \bmod 4\\ p\leqslant x}} \frac{1}{p}\Bigg) = 1.$$

Lösung

a) Da $(\mathbb{Z}/4)^* = \{\overline{1}, \overline{3}\}$ eine zyklische Gruppe mit zwei Elementen ist, gibt es genau zwei Dirichlet-Charaktere modulo 4, also genau einen Charakter, der vom Hauptcharakter verschieden ist. Dieser ist offenbar gleich dem angegebenen χ.

b) Aufgrund der Definition von χ ist

$$L(1,\chi) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots = \frac{\pi}{4}$$

die bekannte Leibnizsche Reihe.

d) Wir setzen $A(x) := \sum\limits_{2<p\leqslant x} \frac{1}{p}$. Bekanntlich ist $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = \infty$.

Weiter sei

$$B_1(x) := \sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 4\\ p\leqslant x}} \frac{1}{p} = \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots$$

$$B_3(x) := \sum_{\substack{p\equiv 3 \bmod 4\\ p\leqslant x}} \frac{1}{p} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots$$

Es ist $A(x) = B_1(x) + B_3(x)$. Mit $C(x) := \sum\limits_{p\leqslant x} \frac{\chi(p)}{p}$ gilt

$$A(x) + C(x) = 2B_1(x) \quad \text{und} \quad A(x) - C(x) = 2B_3(x).$$

Da nach c) gilt $C(x) = O(1)$, folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{B_1(x)}{A(x)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{A(x)+C(x)}{A(x)} = \frac{1}{2},$$

ebenso $\lim\limits_{x\to\infty} B_3(x)/A(x) = \frac{1}{2}$. Daraus ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{B_1(x)}{B_3(x)} = 1, \quad \text{q.e.d.}$$

Dies bedeutet, dass es in einem gewissen Sinne asymptotisch gleichviele Primzahlen $p \equiv 1 \bmod 4$ wie Primzahlen $p \equiv 3 \bmod 4$ gibt.

c) Wir zeigen hier allgemeiner folgende Aussage:

Satz. *Sei $m \geqslant 2$ und $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ein vom Hauptcharakter verschiedener Dirichlet-Charakter modulo m. Es gelte $L(1,\chi) \neq 0$. Dann konvergiert die unendliche Reihe*

$$\sum_{p} \frac{\chi(p)}{p}.$$

Bemerkung. Für $m = 4$ ist die Bedingung $L(1,\chi) \neq 0$ nach 28b) erfüllt. Sie gilt sogar in jedem Fall, wie im Anhang bewiesen wird.

Der *Beweis* des Satzes erfolgt in mehreren Schritten.

1. Schritt. Wir wissen nach 26c), dass die Dirichletreihe $L(s,\chi)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ konvergiert. Insbesondere konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = L(1,\chi).$$

Wir behaupten nun folgende Restglied-Abschätzung:

$$(1) \qquad \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n} = L(1,\chi) + O\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Beweis. Sei $S(x) := \sum_{n \leqslant x} \chi(n)$. Nach 26c) ist $S(x) = O(1)$. Mit Abelscher partieller Summation folgt nun

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n} = \frac{S(x)}{x} + \int_1^x \frac{S(t)}{t^2} dt.$$

Da $|S(x)|$ beschränkt ist, kann man den Grenzübergang $x \to \infty$ durchführen und erhält

$$L(1,\chi) = \int_1^\infty \frac{S(t)}{t^2} dt$$

und damit

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n} = L(1,\chi) + \frac{S(x)}{x} - \int_x^\infty \frac{S(t)}{t^2} dt.$$

Die letzten beiden Terme sind $O(1/x)$, so dass (1) bewiesen ist.

2. Schritt. Hier zeigen wir

$$(2) \qquad \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n} = O(1) \qquad \text{für } x \to \infty.$$

Beweis. Wir gehen aus von der Gleichung

$$\log n = \sum_{k|n} \Lambda(k).$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\chi(n) \log n}{n} = \sum_{k\ell = n} \frac{\Lambda(k)\chi(k)}{k} \cdot \frac{\chi(\ell)}{\ell}$$

und weiter

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n) \log n}{n} = \sum_{k\ell \leqslant x} \frac{\Lambda(k)\chi(k)}{k} \cdot \frac{\chi(\ell)}{\ell} = \sum_{k \leqslant x} \frac{\Lambda(k)\chi(k)}{k} \sum_{\ell \leqslant x/k} \frac{\chi(\ell)}{\ell}.$$

Für die letzte Summe verwenden wir (1) in der Form (wobei $u = x/k$)

$$\sum_{\ell \leqslant u} \frac{\chi(\ell)}{\ell} = L(1,\chi) + \frac{r(u)}{u} \quad \text{mit } r(u) = O(1).$$

Setzen wir dies oben ein, erhalten wir

$$(3) \qquad \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n) \log n}{n} = L(1,\chi) \sum_{k \leqslant x} \frac{\Lambda(k)\chi(k)}{k} + \sum_{k \leqslant x} \frac{\Lambda(k)\chi(k)}{x} \cdot r(x/k).$$

Die Summe auf der linken Seite von (3) ist Partialsumme der für $\mathrm{Re}(s) > 0$ konvergenten Reihe $-L'(s,\chi)$ an der Stelle $s = 1$, also beschränkt für $x \to \infty$. Weil

$$\sum_{k \leqslant x} \Lambda(k) = \psi(x) = O(x)$$

(Tschebyscheffsche Psi-Funktion), ist der letzte Summand der linken Seite von (3) ebenfalls beschränkt. Es folgt

$$L(1,\chi) \sum_{k \leqslant x} \frac{\Lambda(k)\chi(k)}{k} = O(1).$$

Da $L(1,\chi) \neq 0$, folgt daraus die Behauptung (2).

3. Schritt. Behauptung:

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p) \log p}{p} = O(1). \tag{4}$$

Dies folgt aus (2), denn

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n} = \sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p) \log p}{p} + \sum_{k \geqslant 2} \sum_{p^k \leqslant x} \frac{\chi(p)^k \log p}{p^k}.$$

Da $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p(p-1)}$ und $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n(n-1)} < \infty$, ergibt sich

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n} = \sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p) \log p}{p} + O(1),$$

also die Behauptung (4).

Letzter Schritt. Nach (4) ist die Funktion $G(x) := \displaystyle\sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p) \log p}{p}$ beschränkt. Mit Abelscher partieller Summation folgt nun

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p)}{p} = \sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p) \log p}{p} \cdot \frac{1}{\log p} = \frac{G(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{G(t)}{t \log^2 t} dt.$$

Da $\int_2^\infty \frac{1}{t \log^2} dt < \infty$, konvergiert das letzte Integral für $x \to \infty$. Genauer gilt mit $C := \int_2^\infty \frac{G(t)}{t \log^2 t} dt$

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p)}{p} = C + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

---

b.w.

Anhang

Wir zeigen hier in Verallgemeinerung von Aufgabe 28b), dass für jeden Dirichlet-Charakter χ modulo m, der vom Hauptcharakter $\chi_{0,m}$ verschieden ist,

$$L(1, \chi) \neq 0.$$

Ein Spezialfall muss dabei gesondert behandelt werden: Falls ein Dirichlet-Charakter χ nur reelle Werte annimmt, gilt $\chi(n) = \pm 1$ für alle zum Modul m teilerfremden n. Daraus folgt, dass $\chi^2 = \chi_{0,m}$. In diesem Fall spricht man von einem reellen oder quadratischen Dirichlet-Charakter.

Hilfssatz. *Sei χ ein reeller Dirichlet-Charakter und $S(n) := \sum_{d|n} \chi(d)$ seine summatorische Funktion. Dann gilt*

$$S(n) \geqslant 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_1 \quad \text{und} \quad S(n) \geqslant 1, \text{ falls } n \text{ eine Quadratzahl ist.}$$

Beweis. Die Funktion S ist multiplikativ, d.h. für teilerfremde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_1$ gilt $S(n_1 n_2) = S(n_1)S(n_2)$. Daher genügt es, die Aussage für Primzahlpotenzen $n = p^k$ zu beweisen. Wir unterscheiden drei Fälle.

i) $\chi(p) = 0$. Dann ist

$$S(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} \chi(p)^\nu = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

ii) $\chi(p) = 1$. Dann ist

$$S(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} \chi(p)^\nu = \sum_{\nu=0}^{k} 1 = k + 1.$$

ii) $\chi(p) = -1$. Dann ist

$$S(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} \chi(p)^\nu = 1 - 1 + 1 - + \ldots = \begin{cases} 1, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Satz 1. *Sei $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ein vom Hauptcharakter verschiedener reeller Dirichlet-Charakter modulo m. Dann gilt*

$$L(1, \chi) \neq 0.$$

Beweis. Angenommen, es gelte $L(s, \chi) = 0$. Dann ist

$$F(s) := \zeta(s) L(s, \chi)$$

holomorph in der ganzen Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$, da an der Stelle $s = 1$ der Pol von $\zeta(s)$ von der Nullstelle von $L(s, \chi)$ aufgehoben wird.

Es gilt $F(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{n^s}$ mit $c_n = \sum_{k\ell=n} 1 \cdot \chi(\ell)$. Nach dem Hilfssatz ist

$$c_n \geqslant 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_1,$$
$$c_n \geqslant 1, \quad \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist.}$$

Da alle Koeffizienten reell und nicht-negativ sind, konvergiert nach dem Satz von Landau die Dirichlet-Reihe $F(s)$ in der Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$, da $F(s)$ dort holomorph ist. Es ist aber

$$F(\tfrac{1}{2}) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{n^{1/2}} \geqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(k^2)^{1/2}} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} = \infty, \quad \text{Widerspruch!}$$

Also ist die Annahme $L(s,\chi) = 0$ falsch und Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Sei $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ein nicht-reeller Dirichlet-Charakter modulo m. Dann gilt*

$$L(1,\chi) \neq 0.$$

Beweis. Da der Dirichlet-Charakter χ nicht reell ist, ist χ^2 nicht der Hauptcharakter. Die Funktionen $L(s,\chi)$ und $L(s,\chi^2)$ sind daher in der Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ holomorph.

Annahme. $L(1,\chi) = 0$. Dann ist die Funktion

$$F(s) := L(s,\chi_{0,m})^3 L(s,\chi)^4 L(s,\chi^2)$$

in der Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ holomorph und es gilt $F(1) = 0$, da für $s = 1$ der Pol 3. Ordnung von $L(s,\chi_{0,m})^3$ von der Nullstelle mindestens 4. Ordnung von $L(s,\chi)^4$ kompensiert wird. Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ kann man nach Aufgabe 27c) die Funktion $\log F(s)$ in eine Dirichletreihe entwickeln:

$$\log F(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s}(3\chi_{0,m}(n) + 4\chi(n) + \chi(n)^2).$$

Für $\gcd(n,m) = 1$ ist $\chi_{0,m}(n) = 1$ und $\chi(n) = e^{i\alpha_n}$ mit einem $\alpha_n \in \mathbb{R}$, also $\chi(n)^2 = e^{2i\alpha_n}$. Für reelles $\sigma > 1$ folgt nun

$$\log|F(\sigma)| = \mathrm{Re}(\log F(\sigma)) = \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ \gcd(n,m)=1}} \frac{\Lambda_1(n)}{n^\sigma}(3 + 4\cos(\alpha_n) + \cos(2\alpha_n)).$$

Da $3 + 4\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \geqslant 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, folgt

$$\log|F(\sigma)| \geqslant 0, \quad \text{also} \quad |F(\sigma)| \geqslant 1 \text{ für alle } \sigma > 1.$$

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $\lim_{\sigma \searrow 1} F(\sigma) = F(1) = 0$. Also ist die Annahme falsch und Satz 2 bewiesen.