MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

WS 2017/18
17. Nov. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 3, Lösung der Aufgaben 9, 10, 12

Aufgabe 9

Man beweise:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ und $s \neq 1$ und alle $x \geqslant 1$ gilt

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} + R(s,x)$$

$$\text{mit} \quad |R(s,x)| \leqslant \Big(2 + \frac{|t|}{\sigma}\Big) \frac{1}{x^\sigma}, \qquad (s = \sigma + it).$$

Lösung

Mit Abelscher partieller Summation erhalten wir für $\mathrm{Re}(s) > 1$ unter Verwendung der Abkürzung $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \frac{\lfloor u \rfloor}{u^{s+1}}\, du \\ &= \frac{1}{x^{s-1}} + s \int_1^x \frac{1}{u^s}\, du - \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\, du \\ &= \frac{s}{s-1} - \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} - \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\, du. \end{aligned}$$

Lässt man x gegen ∞ gehen, erhält man daraus

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\, du$$

und, indem man beide Gleichungen von einander abzieht,

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} + \underbrace{\frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\, du}_{=:\, R(s,x)}.$$

Da das Integral sogar für $\mathrm{Re}(s) > 0$ absolut konvergiert, gilt die obige Darstellung von $\zeta(s)$ in der ganzen Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$, $(s \neq 1)$.

Um das Restglied

$$R(s,x) := \frac{\{x\}}{x^s} - s\int_x^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,du$$

abzuschätzen, bemerken wir, dass $|\frac{\{x\}}{x^s}| \leqslant x^{-\sigma}$ und

$$\left|s\int_x^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,du\right| \leqslant |s|\int_x^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}} = \frac{|s|}{\sigma}\frac{1}{x^\sigma} \leqslant \frac{\sigma+|t|}{\sigma}\frac{1}{x^\sigma}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 10

Man beweise die folgenden Abschätzungen:

i) $\quad |\zeta(\sigma+it)| \leqslant \zeta(\sigma) \quad$ für alle $\sigma > 1$ und $t \in \mathbb{R}$,

ii) $\quad |\zeta(1+it)| = O(\log|t|) \quad$ für $|t| \to \infty$,

iii) $\quad |\zeta(\sigma+it)| = O(|t|^{1-\sigma}) \quad$ für $0 < \sigma < 1$ und $|t| \to \infty$.

Lösung von ii)

Wegen $\zeta(1-it) = \overline{\zeta(1+it)}$ braucht man nur den Fall $t > 0$ zu betrachten.
Speziell für $s = 1+it$, $t > 0$, ergibt die Formel von Aufgabe 9

$$|\zeta(1+it)| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} + \frac{1}{t} + (2+t)\frac{1}{x}.$$

Setzt man $x := t$, folgt

$$|\zeta(1+it)| \leqslant \sum_{n\leqslant t}\frac{1}{n} + O(1) = O(\log t) \quad \text{für } t \to \infty, \text{ q.e.d.}$$

Lösung von iii)

O.B.d.A. sei $t = \mathrm{Im}(s) \geqslant 1$. Da $|\frac{1}{s-1}| \leqslant 1$ für $t \geqslant 1$ folgt aus Aufgabe 9

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^\sigma} + x^{1-\sigma} + \left(2+\frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{x^\sigma}.$$

Wir wählen wieder $x = t$. Es ergibt sich

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n\leqslant t}\frac{1}{n^\sigma} + t^{1-\sigma} + \left(2+\frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{t^\sigma}.$$

Wegen $\displaystyle\sum_{n\leqslant t}\frac{1}{n^\sigma} = \frac{t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + O(1)$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 12

a) Man beweise folgende Approximation für die Euler-Mascheronische Konstante γ:
Für alle $n \geqslant 1$ und $r \geqslant 1$ gilt

$$\gamma = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\Big) - \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{B_{2j}}{2j} \cdot \frac{1}{n^{2j}} + \theta \cdot \Big(\frac{B_{2r}}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}}\Big)$$

mit $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

b) Man gebe geeignete Werte von n und r an, um damit γ auf 1000 Dezimalstellen genau zu berechnen.

c) Man zeige: Für festes n gilt $\lim\limits_{r\to\infty}\Big(\frac{|B_{2r}|}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}}\Big) = \infty$.

Lösung

Wir wenden die Euler-MacLaurinsche Summationsformel

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \tfrac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n f(x)dx + \sum_{j=1}^{r} \frac{B_{2j}}{(2j)!}(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(1))$$
$$- \int_1^n \frac{\widetilde{B}_{2r}(x)}{(2r)!} f^{(2r)}(x)dx$$

auf die Funktion $f : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$, an. Da

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad \ldots, \quad f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu \frac{\nu!}{x^{\nu+1}}, \quad \ldots$$

erhält man

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) + \log n + \sum_{j=1}^{r} \frac{B_{2j}}{2j}\Big(\frac{1}{n^{2j}} - 1\Big) - \int_1^n \widetilde{B}_{2r}(x)\frac{1}{x^{2r+1}}dx$$

Bringt man hier $\log n$ auf die linke Seite und lässt $n \to \infty$ gehen, so ergibt sich wegen $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1/k - \log(n)$

$$(2) \qquad \gamma = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{r} \frac{B_{2j}}{2j} - \int_1^\infty \widetilde{B}_{2r}(x)\frac{1}{x^{2r+1}}dx$$

Die Differenz der Gleichungen (2) - (1) liefert nun

$$(3) \qquad \gamma = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\Big) - \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^{r} \frac{B_{2j}}{2j}\frac{1}{n^{2j}} - \int_n^\infty \widetilde{B}_{2r}(x)\frac{1}{x^{2r+1}}dx$$

Wir müssen nun das Integral

$$R := R_{n,r} := \int_n^\infty \widetilde{B}_{2r}(x)\frac{1}{x^{2r+1}}dx$$

abschätzen. Wegen $|\widetilde{B}_{2r}(x)| \leqslant |B_{2r}|$ für alle x folgt

$$|R| \leqslant |B_{2r}| \int_n^\infty \frac{1}{x^{2r+1}}dx = \frac{|B_{2r}|}{2r}\frac{1}{n^{2r}}.$$

also

$$R = \theta' \cdot \frac{B_{2r}}{2r}\frac{1}{n^{2r}} \quad \text{mit } |\theta'| \leqslant 1.$$

Fasst man dies mit dem letzten Summanden der Summe $\sum_{j=1}^{r}$ aus der Formel (3) zusammen, ergibt sich

$$\text{(4)} \qquad \gamma = \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\Big) - \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^{r-1}\frac{B_{2j}}{2j}\frac{1}{n^{2j}} + \theta \cdot \frac{B_{2r}}{2r}\frac{1}{n^{2r}}$$

mit $\theta = 1 - \theta'$. Aus $|\theta'| \leqslant 1$ folgt $0 \leqslant \theta \leqslant 2$. Um die in der Aufgabe behauptete schärfere Abschätzung $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ zu erhalten, braucht man $\theta' \geqslant 0$. Dies folgt aus dem anschließend bewiesenen Satz A.

b) Aus der Formel

$$\zeta(2r) = (-1)^{r-1}\frac{(2\pi)^{2r}}{2(2r)!}B_{2r}$$

folgt

$$|B_{2r}| = \frac{2(2r)!}{(2\pi)^{2r}}\zeta(2r).$$

Da $\zeta(2r) \sim 1$ für $r \to \infty$ und wegen der Stirlingschen Formel

$$(2r)! \sim \sqrt{2\pi \cdot 2r}\Big(\frac{2r}{e}\Big)^{2r}$$

hat man bis auf einen kleinen prozentualen Fehler

$$\text{(5)} \qquad |R| \leqslant \frac{|B_{2r}|}{2r}\frac{1}{n^{2r}} \approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2r}}{r}\Big(\frac{2r}{2\pi \cdot e \cdot n}\Big)^{2r} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{r}}\Big(\frac{r}{\pi \cdot e \cdot n}\Big)^{2r}.$$

Will man γ auf 1000 Dezimalstellen genau berechnen, so kann man z.B. $r = 200$ und $n = 2^{13} = 8192$ wählen, denn damit ergibt die obige Abschätzung

$$|R| = |R_{2^{13},200}| < 10^{-1018}.$$

Es is günstig, $n = 2^\nu$ als Zweierpotenz zu wählen, denn dann ist $\log n = \nu \log 2$ und für $\log 2$ hat man die schnell konvergente Reihe

$$\log 2 = 2\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots\Big).$$

c) Aus (5) folgt für festes n

$$\lim_{r\to\infty}\Big(\frac{|B_{2r}|}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}}\Big) = \infty,$$

da $r^{2r-1/2}$ für $r \to \infty$ schneller gegen unendlich wächst als c^{2r} für jede Konstante $c > 0$.

Satz A. *Sei $B : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $B(x) = B(1-x)$ *für alle* $x \in [0,1]$.

(ii) $B(x)$ *ist im Intervall* $[0, \frac{1}{2}]$ *monoton fallend (und daher in* $[\frac{1}{2}, 1]$ *monoton steigend).*

(iii) $\displaystyle\int_0^1 B(x)dx = 0.$

Dann gilt für jede positive, monoton fallende konvexe Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\int_0^1 B(x)f(x)dx \geqslant 0.$$

Beweis. Wegen der Symmetrie-Eigenschaft von B ist

$$\int_0^1 B(x)f(x)dx = \int_0^1 B(x)f(1-x)dx = \int_0^{1/2} B(x)\left(f(x) + f(1-x)\right)dx.$$

Die Funktion $g(x) := f(x) + f(1-x)$ ist im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ monoton fallend und positiv. Es gibt ein $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, so dass

$$B(x) \begin{cases} \geqslant 0 & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ \leqslant 0 & \text{für } x_1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Da (aus Symmetriegründen) $\int_0^{1/2} B(x)dx = 0$, folgt $\int_0^{x_1} B(x)dx = -\int_{x_1}^{1/2} B(x)dx \geqslant 0$.

Mit $c := g(x_1) > 0$ gilt $g(x) \geqslant c$ für $0 \leqslant x \leqslant x_1$ und $g(x) \leqslant c$ für $x_1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 B(x)f(x)dx &= \int_0^{1/2} B(x)g(x)dx \\ &= \int_0^{x1} B(x)g(x)dx + \int_{x1}^{1/2} B(x)g(x)dx \\ &\geqslant c\int_0^{x1} B(x)dx + c\int_{x1}^{1/2} B(x)dx = 0, \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Wir beweisen jetzt, dass die mit einem Vorzeichen-Faktor versehenen Bernoulli-Polynome

$$F(x) := (-1)^{k-1}B_{2k}(x)$$

die Bedingungen (i) bis (iii) von Satz A erfüllen. Kritisch ist nur die Bedingung (ii). Dazu zeigen wir:

Hilfssatz. *Das Bernoulli-Polynom* $B_{2k+1}(x)$ *mit ungeradem Grad* $2k+1 \geqslant 3$ *hat im Intervall* $[0,1]$ *genau 3 Nullstellen, nämlich* $0, \frac{1}{2}, 1$.

Beweis. Dass $B_{2k+1}(x)$ mindestens diese 3 Nullstellen hat, ist klar. Dass es nicht mehr als 3 Nullstellen sein können, beweisen wir durch Induktion nach k.

Induktionsanfang $k = 1$. Da $B_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist, kann es nicht mehr als 3 Nullstellen haben.

Induktionsschritt. Sei $k > 1$ und vorausgesetzt, dass $B_{2k-1}(x)$ im Intervall $[0,1]$ genau 3 Nullstellen hat. Hätte $B_{2k+1}(x)$ mehr als 3 Nullstellen im Intervall $[0,1]$ müssten es wegen der Antisymmetrie $B_{2k+1}(x) = -B_{2k+1}(1-x)$ mindestens 5 Nullstellen sein. Da $B_{2k}(x) = \frac{1}{2k+1}B'_{2k+1}(x)$, folgt nach dem Satz von Rolle, dass $B_{2k}(x)$ im offenen Intervall $]0,1[$ mindestens 4 Nullstellen hat, also hätte $B_{2k-1}(x)$ wegen $B_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k}B'_{2k}(x)$ in $]0,1[$ mindestens 3 Nullstellen. Dazu kommen noch die Nullstellen 0 und 1, d.h. $B_{2k-1}(x)$ hätte im abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ mindestens 5 Nullstellen, was im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung steht.

Wir können jetzt zeigen, dass $F(x) = (-1)^{k-1}B_{2k}(x)$ im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ streng monoton fällt. Dies ist klar für $k = 1$, denn $B_2(x) = x^2 - x - \frac{1}{6} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12}$.
Falls $k > 1$, folgt aus dem Hilfssatz, dass $F'(x) \neq 0$ für alle x mit $0 < x < \frac{1}{2}$. Da $F(0) = (-1)^{k-1}B_{2k}(0) = |B_{2k}| > 0$ der Maximalwert von $F(x)$ im Intervall $[0,1]$ ist, gilt $F'(x) < 0$ für $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, als fällt $F(x)$ in $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ streng monoton.

Corollar. *Für alle natürlichen Zahlen $r \geqslant 1$ und $n \geqslant m \geqslant 1$ gilt*

$$(-1)^{r-1} \int_m^n \widetilde{B}_{2r}(x) \frac{1}{x^{2r+1}} dx \geqslant 0.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz A und den obigen Bemerkungen, denn offensichtlich ist $f(x) = 1/x^{2r+1}$ auf ganz $[1, \infty[$ positiv, monoton fallend und konvex.