Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
2. Februar 2018

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Klausur

Aufgabe 1

a) Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(x) = 0$ für $x < 2$. Die Funktion $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ werde definiert durch

$$F(x) := \sum_{k \geqslant 1} f(x^{1/k}).$$

Man beweise:

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 1} \mu(k) F(x^{1/k}).$$

b) Man drücke die Tschebyscheffsche Theta-Funktion $\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p$ durch die Tschebyscheffsche Psi-Funktion $\psi(x) := \sum_{p^k \leqslant x} \log p$ aus.

Aufgabe 2

Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge komplexer Zahlen. Für ein $\alpha \geqslant 0$ gelte

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = O(x^\alpha) \quad \text{für } x \to \infty.$$

Man beweise: Die Dirichletreihe

$$f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Aufgabe 3

Sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichletreihe, die für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ konvergiert.

a) Wie lautet die Dirichletreihe von $f'(s)$?

b) Man zeige, dass die Dirichletreihe von $f'(s)$ ebenfalls für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ konvergiert.

---

b.w.

Aufgabe 4

Die Mangoldt-Funktion $\Lambda : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^k,\ p \text{ prim},\ k \geqslant 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beweise:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n.$$

Aufgabe 5

(Das Ergebnis von Aufgabe 4 darf benutzt werden.)

Man beweise:

a) Die Dirichletreihe $F(s) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

b) Es gilt $F(s)\zeta(s) = -\zeta'(s)$, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \quad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1.$$