Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
17. Jan. 2018

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 10

Aufgabe 37

Für die Anzahl $N(T)$ der nicht-trivialen Nullstellen ϱ der Zetafunktion mit $0 < \mathrm{Im}(\varrho) \leqslant T$ beweise man

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T).$$

Aufgabe 38

Man beweise: Zu jedem $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < 1$ existiert eine Konstante $C_\delta > 0$, so dass

$$|\zeta(\sigma + iT)| \leqslant C_\delta |T|^{1-\delta} \quad \text{für alle } \sigma \geqslant \delta \text{ und alle } |T| \geqslant 1.$$

Aufgabe 39

Man beweise: Die Funktion $F(s) := (s-1)\zeta(s)$ ist eine ganze holomorphe Funktion der Ordnung 1, d.h. für jedes $\delta > 0$ gilt

$$F(s) = O(\exp(|s|^{1+\delta})) \quad \text{für } |s| \to \infty.$$

Aufgabe 40

a) Man beweise: Für jedes $\sigma > 1$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \zeta(\sigma + it)\, dt = 1.$$

Anleitung: Man integriere die Zeta-Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ gliedweise.

b) Man zeige: Die Aussage aus Teil a) gilt sogar für jedes $\sigma > 0$.

Anleitung: Man verwende den Cauchyschen Integralsatz für das Rechteck mit den Ecken $\sigma + iT$, $2 + iT$, $2 + 2iT$, $\sigma + 2iT$ und verwende Aufgabe 38.