Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
8. Jan. 2018

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 9

Aufgabe 33

Sei saw : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{saw}(x) := x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, die in der Euler-Maclaurinschen Summations-Formel vorkommende Sägezahn-Funktion. Man zeige:

a) $$1 + \int_1^\infty \frac{\operatorname{saw}(x)}{x}\,dx = \log\sqrt{2\pi} = -\zeta'(0),$$

b) $$\frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{\operatorname{saw}(x)}{x^2}\,dx = \gamma = \lim_{\varepsilon \searrow 0}\Big(\zeta(1+\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\Big),$$

c) $$\frac{3}{2} - 2\int_1^\infty \frac{\operatorname{saw}(x)}{x^3}\,dx = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2).$$

Aufgabe 34

Man beweise: Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}dx.$$

Aufgabe 35

a) Man zeige: Für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $-2 < \sigma < 1$ gilt $\zeta(\sigma) < 0$.

b) $$\zeta'(-2) = -\frac{\zeta(3)}{(2\pi)^2}.$$

Aufgabe 36

Seien $\varrho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n \geqslant 1$, die nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion in der oberen Halbebene, nach wachsendem Imaginärteil geordnet: $0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \gamma_3 \leqslant \gamma_4 \leqslant \ldots$.
Man beweise die asymptotische Beziehung

$$\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n} \qquad \text{für } n \to \infty.$$