Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
15. Dez. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 8

Aufgabe 29

a) Sei a eine positive reelle Konstante. Für die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{a^2+x^2}$ berechne man mittels Residuenkalkül die Fourier-Transformierte

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x t}}{a^2+x^2}\,dx$$

Hinweis. Fallunterscheidung $t > 0$, $t < 0$, $t = 0$.

b) Mithilfe der Poissonschen Summenformel bestimme man den Wert der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2}.$$

Aufgabe 30

a) Es sei $F(s) := \cos(\frac{\pi s}{2})\,\zeta(s)$. Man zeige, dass F in einer Umgebung des Punktes $s = 1$ holomorph ist (hebbare Singularität) und dass gilt

$$F(1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad F'(1) = -\frac{\pi\gamma}{2}.$$

b) Aus der Produkt-Darstellung der reziproken Gamma-Funktion

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1+\frac{z}{n}\Big) e^{-z/n}$$

leite man ab, dass

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

c) Man zeige mit Hilfe der Funktionalgleichung $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\frac{\pi s}{2})\,\zeta(s)$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Aufgabe 31

Sei $\Lambda : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$ die Mangoldt-Funktion und $\psi(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)$ die Tschebyscheffsche Psi-Funktion. Man beweise:

a) $$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n,$$

b) $$\log(\lfloor x\rfloor!) = \sum_{n\leqslant x} \log n = \sum_{n\leqslant x} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big),$$

c) $$\sum_{n\leqslant x} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) = \sum_{n\leqslant x} \Big\lfloor\frac{x}{n}\Big\rfloor \Lambda(n),$$

d) $$\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1),$$

e) $$\sum_{p\leqslant x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Aufgabe 32*

Für $t \in \mathbb{R}^*$ beweise man:

a) $$\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+it}} = O(1),$$

b) $$\sum_{p\leqslant x} \frac{\log p}{p^{1+it}} = O(1).$$

c) (Vgl. Aufgabe 4b) Der Limes $\displaystyle\sum_{p} \frac{1}{p^{1+it}} =: c \in \mathbb{C}$ existiert und es gilt

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p^{1+it}} = c + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

---

* Die erste korrekte Lösung der Stern-Aufgabe, die per Email an
`forster@math.lmu.de`
eingeht, wird mit einem Notenbonus von 0.3 auf die Klausurnote honoriert.