Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
28. Nov. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 6

Aufgabe 21

a) Man beweise: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\pi((1+\varepsilon)x) - \pi(x) \sim \frac{\varepsilon x}{\log x},$$

b) Man folgere daraus die asymptotischen Beziehungen (für $x \to \infty$)

$$\pi(2x) - \pi(x) \sim \pi(x) \qquad \text{und} \qquad \pi(ax) \sim a\pi(x) \quad (a > 1 \text{ fest}).$$

Aufgabe 22

Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Man beweise:

a) $\displaystyle\sum_p f(p)$ konvergiert genau dann, wenn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{\log(n)}$ konvergiert.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn $\displaystyle\sum_p f(p)\log(p)$ konvergiert.

Dabei bedeutet $\displaystyle\sum_p$ Summation über alle Primzahlen.

Aufgabe 23

Die Liouvillesche Funktion $\lambda : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ ist wie folgt definiert: Sei $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ die kanonische Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}_1$ und $k := \sum_{j=1}^{r} k_j$. Dann setzt man

$$\lambda(n) := (-1)^k.$$

Für quadratfreies n gilt also $\lambda(n) = \mu(n)$ (dabei ist μ die Möbius-Funktion).

a) Man beweise die Summenformel

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Man zeige für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\text{(i)} \quad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \qquad \text{und} \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}$$

Aufgabe 24

Für $x \geqslant 1$ bezeichne $\nu_{\mathrm{ev}}(x)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $n \leqslant x$, die eine gerade Anzahl von Primfaktoren (mit Vielfachheit gerechnet) haben (d.h. $\lambda(n) = 1$), und $\nu_{\mathrm{odd}}(x)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $n \leqslant x$, die eine ungerade Anzahl von Primfaktoren haben (d.h. $\lambda(n) = -1$). Weiter sei $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ eine reelle Zahl mit

$$|\nu_{\mathrm{ev}}(x) - \nu_{\mathrm{odd}}(x)| = O(x^{\theta+\varepsilon}) \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Man beweise:

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(s) > \theta.$$
