Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
24. Nov. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Für den Integral-Logarithmus $\mathrm{Li}(x) := \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ zeige man:

a) Für kein $k > 2$ gilt $\quad \mathrm{Li}(x) - \dfrac{x}{\log x} = O\Big(\dfrac{x}{\log^k x}\Big)$.

b) Für kein $\varepsilon > 0$ gilt $\quad \mathrm{Li}(x) - \dfrac{x}{\log x} = O\left(x^{1-\varepsilon}\right)$.

Aufgabe 18

Man beweise: Das folgende Integral existiert als "Cauchyscher Hauptwert"

$$\int_0^2 \frac{dt}{\log t} := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Big(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dt}{\log t} \Big).$$

Aufgabe 19

Man beweise:

a) Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{C}$ eine Funktion und $F : [1, \infty[\to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(x) := \sum_{n \leqslant x} f\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Dann folgt $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n \leqslant x} \mu(n) F\Big(\frac{x}{n}\Big)$.

b) $\quad \displaystyle\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1 \quad$ für alle $x \geqslant 1$.

c) $\quad \displaystyle\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \quad$ bleibt beschränkt für $x \to \infty$.

Aufgabe 20

Sei $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3,\ p_4, \ldots$ die Folge der Primzahlen, der Größe nach geordnet.
Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \text{und} \qquad p_n \sim n \log n.$$