Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
15. Nov. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung
Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe, die im Punkt $s = s_0 \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig absolut) konvergiert. Man beweise: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \pi/2$ konvergiert $f(s)$ gleichmäßig im abgeschlossenen Winkelbereich

$$\operatorname{Ang}(s_0, \alpha) := \{s = s_0 + re^{i\phi} : \ r \geqslant 0, \, |\phi| \leqslant \alpha\}.$$

Aufgabe 14

a) Sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ eine Dirichlet-Reihe mit $\sigma_a(f) < \infty$. Es gebe eine Folge von Punkten $s_\nu \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} \operatorname{Re}(s_\nu) = \infty$ und $f(s_\nu) = 0$ für alle ν.
Man zeige, dass dann $a_n = 0$ für alle $n \geqslant 1$ (*Identitätssatz* für Dirichlet-Reihen).

b) Sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ eine Dirichlet-Reihe mit $a_1 = 1$ und $\sigma_a(f) < \infty$.

Man zeige: Es gibt ein $\sigma_0 \geqslant \sigma_a(f)$, so dass $f(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$. In der Halbebene $\{\operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$ existiert ein eindeutig bestimmter Zweig von $\log f(s)$ mit $\lim_{\operatorname{Re}(s)\to\infty} \log f(s) = 0$. Die Funktion $\log f(s)$ besitzt ebenfalls eine Darstellung als Dirichlet-Reihe.

Aufgabe 15

a) Sei $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ eine Dirichlet-Reihe, die für $s = 0$ divergiert und sei

$$A(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n.$$

Man beweise folgende Formel für die bedingte Konvergenz-Abszisse:

$$\sigma_c(f) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : A(x) = O(x^\alpha)\}.$$

b) Sei $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Man beweise: Es gibt eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n = \pm 1$ für alle n, so dass für die Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ gilt:

$$\sigma_c(f) = \alpha, \quad \sigma_a(f) = 1.$$

---

b.w.

Aufgabe 16

Sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leqslant x$ und

$$\pi_1(x) := \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} \pi(x^{1/k}).$$

Man beweise:

a) $$\pi(x) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{\mu(k)}{k} \pi_1(x^{1/k}), \qquad (\mu \text{ ist die Möbius-Funktion}).$$

b) Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\log \zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\pi_1(x)}{x^{s+1}} dx$$
