Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
8. Nov. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 3

Aufgabe 9

Man beweise (vgl. Aufgabe 8a):

Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ und $s \neq 1$ und alle $x \geqslant 1$ gilt

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} + R(s,x)$$

$$\text{mit} \quad |R(s,x)| \leqslant \Big(2 + \frac{|t|}{\sigma}\Big)\frac{1}{x^\sigma}, \qquad (s = \sigma + it).$$

Aufgabe 10

Man beweise die folgenden Abschätzungen:

i) $\quad |\zeta(\sigma + it)| \leqslant \zeta(\sigma)$ für alle $\sigma > 1$ und $t \in \mathbb{R}$,

ii) $\quad |\zeta(1 + it)| = O(\log|t|)$ für $|t| \to \infty$,

iii) $\quad |\zeta(\sigma + it)| = O(|t|^{1-\sigma})$ für $0 < \sigma < 1$ und $|t| \to \infty$.

Anleitung zu ii) und iii):
Man verwende Aufgabe 9 mit geeigneter Wahl von x in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 11

Sei γ die Euler-Mascheronische Konstante. Man beweise:

a) $$\sum_{n \leqslant x} \Big\lfloor \frac{x}{n} \Big\rfloor = x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}).$$

Anleitung. Man zeige als Zwischenschritte

$$\sum_{n \leqslant x} \Big\lfloor \frac{x}{n} \Big\rfloor = \sum_{k\ell \leqslant x} 1 = \sum_{\substack{k\ell \leqslant x \\ k \leqslant \sqrt{x}}} 1 + \sum_{\substack{k\ell \leqslant x \\ \ell \leqslant \sqrt{x}}} 1 - \sum_{k,\ell \leqslant \sqrt{x}} 1 = 2 \sum_{k \leqslant \sqrt{x}} \Big\lfloor \frac{x}{k} \Big\rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2.$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \Big(\frac{x}{n} - \Big\lfloor \frac{x}{n} \Big\rfloor \Big) = 1 - \gamma = 0.422784335\ldots.$$

---

b.w.

Aufgabe 12

a) Man beweise folgende Approximation für die Euler-Mascheronische Konstante γ:
Für alle $n \geqslant 1$ und $r \geqslant 1$ gilt

$$\gamma = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\Big) - \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{B_{2j}}{2j} \cdot \frac{1}{n^{2j}} + \theta \cdot \Big(\frac{B_{2r}}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}}\Big)$$

mit $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

b) Man gebe geeignete Werte von n und r an, um damit γ auf 1000 Dezimalstellen genau zu berechnen.

c) Man zeige: Für festes n gilt $\lim\limits_{r\to\infty}\Big(\frac{B_{2r}}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}}\Big) = \infty$.
