Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
27. Okt. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 2

Aufgabe 5 Sei

$$(*) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten und Konvergenzradius 1.

a) Es gebe ein $t \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe $f(e^{it})$ konvergiert. Man zeige:

$$\lim_{r \nearrow 1} f(re^{it}) = f(e^{it})$$

b) Man gebe ein Beispiel einer Reihe $(*)$, so dass der Grenzwert

$$\lim_{r \nearrow 1} f(re^{it}) =: c \in \mathbb{C}$$

existiert, aber $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$ divergiert.

Aufgabe 6

Mittels Aufgabe 5a) bestimme man den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n} \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z},$$

(vgl. Aufgabe 3)

Aufgabe 7

Für eine reelle Zahl $a > 0$ ist die *Hurwitz'sche Zetafunktion* definiert durch

$$\zeta(s,a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Man zeige, dass sich diese Funktion zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Die fortgesetzte Funktion ist in $\mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$ holomorph und hat in $s = 1$ einen Pol 1. Ordnung.

---

b.w.

Aufgabe 8

Man beweise mittels Abelscher partieller Summation:
Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ und $s \neq 1$ gilt

(a) $$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} + O\Big(\frac{1}{x^s}\Big);$$

und

(b) $$\zeta'(s) = -\sum_{n \leqslant x} \frac{\log n}{n^s} - \frac{1}{(s-1)^2} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} - \frac{1}{s-1} \cdot \frac{\log x}{x^{s-1}} + O\Big(\frac{\log x}{x^s}\Big).$$

Dabei bezieht sich $O(\ldots)$ auf den Grenzübergang $x \to \infty$ (bei festem s).
