Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
20. Okt. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

a) Man beweise

$$\lim_{x\to\infty}\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=0.$$

b) Für $x \geqslant 1$ sei $P_x := \prod_{p\leqslant x} p$. Man zeige

$$\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\sum_{n|P_x}\frac{\mu(n)}{n}$$

Dabei wird über alle Teiler von P_x summiert und $\mu : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ ist die Möbiusfunktion

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0, & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei,} \\ (-1)^r, & \text{falls } n \text{ Produkt von } r \text{ verschiedenen Primzahlen.} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Man beweise folgende Formel für die Euler-Mascheronische Konstante

$$\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k}.$$

Aufgabe 3

a) Für $x \in \mathbb{R}_+$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $\quad S(x,t) := \sum_{1\leqslant n\leqslant x} e^{int}.$

Man zeige: Zu jedem δ mit $0 < \delta < \pi$ existiert eine Konstante $K = K(\delta) > 0$, so dass

$$|S(x,t)| \leqslant K \quad \text{fur alle } x > 0 \text{ und alle } t \in [\delta, 2\pi-\delta].$$

b) Man beweise mittels Abelscher partieller Summation: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{int}}{n}$$

konvergiert gleichmäßig auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$.

---

b.w.

Aufgabe 4

Man beweise:

a) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ divergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+it}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-it\log n}}{n}$$

b)* Für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{p} \frac{1}{p^{1+it}}$$