Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2017
14. Juni 2017

# Einführung in die Zahlentheorie

## Übungsblatt 7

### Aufgabe 25

Man beweise

a) $$\lim_{x\to\infty} \sum_{x<n\leqslant 2x} \frac{1}{n} = \log 2.$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \sum_{x<p\leqslant x^2} \frac{1}{p} = \log 2.$$

### Aufgabe 26

Sei $f : [1,\infty[ \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und

$$F(x) := \int_1^x f(t)dt \quad \text{für } x \geqslant 1.$$

Man beweise: Es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} f(n) = F(x) + c + o(1) \quad \text{für } x \to \infty.$$

(Bemerkung: Für $f(x) = 1/x$ erhält man daraus die Existenz der Euler-Mascheronischen Konstanten.)

### Aufgabe 27*

In dieser Aufgabe betrachten wir Folgen natürlicher Zahlen $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ mit $q_n \sim n \log n$. (Die Folge aller Primzahlen hat diese Eigenschaft.)

a) Man zeige: Für jede Folge $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen mit $q_n \sim n \log n$ gilt:

$$\sum_{q_n\leqslant x} \frac{1}{q_n} \sim \log\log x \qquad \text{für } x \to \infty.$$

b) Existiert für jede Folge $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen mit $q_n \sim n \log n$ sogar der Limes

$$\lim_{x\to\infty} \Big( \sum_{q_n\leqslant x} \frac{1}{q_n} - \log\log x \Big) \ ?$$

Beweis oder Gegenbeispiel!

c) Man konstruiere eine Folge $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen mit $q_n \sim n \log n$, so dass folgendes gilt:

Es gibt beliebig große natürliche Zahlen $N$, so dass kein $q_n$ existiert mit $N^2 < q_n < (N+1)^2$.

---

**Aufgabe 28**

Man beweise:

a) Sei $p$ eine ungerade Primzahl. Dann hat für alle $k \geqslant 1$ die Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod p^k$ genau zwei Lösungen, nämlich $x \equiv \pm 1 \bmod p^k$.

b) Für $k \geqslant 3$ hat die Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod 2^k$ genau vier Lösungen, nämlich $x \equiv \pm 1 \bmod 2^k$ und $x \equiv \pm(1 + 2^{k-1}) \bmod 2^k$.

---

* Durch eine vollständige, korrekte und selbständige Lösung der Sternaufgabe kann ein Notenbonus (von 0.3) auf die Klausurnote erworben werden. Lösungen sind möglichst bald, jedoch spätestens bis zum 21. Juni 2017, entweder (in geTEXter Form) per Email an `forster@math.lmu.de` zu senden, oder in der Vorlesung abzugeben.

Notenboni können höchstens bis zu 0.7 akkumuliert werden.