Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2017
7. Juni 2017

Einführung in die Zahlentheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 21

Für $n \geqslant 1$ sei $E(n) := (10^n - 1)/9$. Dies ist eine ganze Zahl, deren Dezimaldarstellung aus n Einsen besteht (sog. *Repunit*). Man zeige:

a) $E(n)$ ist höchstens dann prim, wenn n eine Primzahl ist.

b) Sei $p > 3$ prim. Besitzt $E(p)$ einen Primteiler q, so gilt $q \equiv 1 \bmod 2p$.

Aufgabe 22

Für die Mangoldtsche Funktion $\Lambda : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$,

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^k,\ p \text{ prim},\ k \geqslant 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

beweise man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \qquad \text{für } s > 1.$$

Aufgabe 23

a) Die sog. *Primzeta-Funktion* $P(s)$ ist für reelles $s > 1$ definiert durch

$$P(s) := \sum_{p} \frac{1}{p^s}.$$

Dabei wird über alle Primzahlen p summiert. Man beweise:

$$P(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(n)}{n^s},$$

wobei $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n bezeichnet.

b) Mittels a) berechne man die Summe

$$\sum_{d|n} \mu(d)\omega\Big(\frac{n}{d}\Big).$$

---

b.w.

Aufgabe 24

Sei $(q_n)_{n \geqslant 1}$ eine monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n \to \infty} q_n = \infty$. Für $x > 0$ werde definiert

$$Q(x) := \max\{n \in \mathbb{N}_1 : q_n \leqslant x\}.$$

Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\quad q_n \sim n \log n,$

b) $\quad Q(x) \sim \dfrac{x}{\log x}.$
