Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2017
31. Mai 2017

Einführung in die Zahlentheorie

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Für die Teileranzahl-Funktion τ beweise man:

a) $\tau(n)$ ist genau dann ungerade, wenn n eine Quadratzahl ist.

b) $\displaystyle\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_1$.

c) $\displaystyle\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \Big(\sum_{d|n} \tau(d)\Big)^2$.

Hinweis. Man beweise dazu $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$.

Aufgabe 18

a) Für die Eulersche Phi-Funktion bestimme man alle Lösungen der Gleichungen

i) $\varphi(n) = 2$,
ii) $\varphi(n) = 3$,
iii) $\varphi(n) = 10$,
iv) $\varphi(n) = 14$.

(Falls keine Lösung existiert, beweise man dies!)

b) Für welche $n \in \mathbb{N}_1$ gilt

i) $\varphi(n) = n/2$,
ii) $\varphi(n) = n/3$.

Aufgabe 19

a) Man zeige: $\displaystyle\sum_{d^2|n} \mu(d) = |\mu(n)|$.

Dabei wird über alle Teiler von n, die Quadratzahlen sind, summiert.

b) Man folgere aus a) für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{|\mu(n)|}{n^s}.$$

---

b.w.

Aufgabe 20

Für reelles $x \geqslant 1$ bezeichne $\mathrm{Sqfr}(x)$ die Menge aller natürlichen Zahlen $n \leqslant x$, die quadratfrei sind. Man beweise:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#\mathrm{Sqfr}(x)}{x} = \frac{6}{\pi^2}.$$