Mathematisches Institut der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2017
24. Mai 2017

Einführung in die Zahlentheorie

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Ein Element x eines Ringes R heißt *idempotent*, wenn $x^2 = x$.

a) Man zeige: Im Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gibt es genau 2^r idempotente Elemente, wobei r die Anzahl der verschiedenen Primteiler von m ist.

b) Man bestimme explizit alle idempotenten Elemente des Rings $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$.

Aufgabe 14

Man beweise: Eine ungerade ganze Zahl $p \geqslant 3$ ist genau dann prim, falls

$$(\tfrac{p-1}{2})!^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \bmod p.$$

Aufgabe 15

Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f(x) = 0$ für $x \leqslant 1 + \varepsilon$. Es werde eine Funktion $F : [1, \infty[\to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(x) := \sum_{k \geqslant 1} f(x^{1/k}).$$

(Die Summe ist endlich, da $x^{1/k} \leqslant 1 + \varepsilon$ für genügend großes k.)

Man beweise folgende Umkehrformel:

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 1} \mu(k) F(x^{1/k}).$$

Dabei bezeichnet $\mu : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ die Möbius-Funktion.

Aufgabe 16

Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_1$ gilt

$$\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \gcd(k,n)=1}} e^{2\pi i k/n} = \mu(n).$$

Hier wird nur über die zu n teilerfremden k summiert.

Bemerkung. Für jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ gilt bekanntlich

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i k/n} = 0.$$