MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

SS 2017
17. Mai 2017

Einführung in die Zahlentheorie

Übungsblatt 3

Aufgabe 9

Im Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ betrachte man die Elemente

$$\xi_1 := \sqrt{-5}, \qquad \xi_2 := 7, \qquad \xi_3 := 29.$$

Welche dieser Elemente sind irreduzibel, welche sind prim?

Aufgabe 10

Seien $m, n \geqslant 2$ ganze Zahlen und $d := \gcd(m, n)$. Weiter seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Man beweise:
Das System von Kongruenzen

$$x \equiv a \bmod m, \qquad x \equiv b \bmod n$$

besitzt genau dann eine ganzzahlige Lösung x, wenn $a \equiv b \bmod d$.
In diesem Fall ist die Lösung x modulo $N := \operatorname{lcm}(m, n) = mn/d$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 11

Die Fibonacci-Zahlen $f_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \quad \text{für } n \geqslant 1.$$

Die ersten Fibonacci-Zahlen lauten also wie folgt:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

Man beweise:

$$\begin{aligned}
3 \mid n &\iff 2 \mid f_n,\\
4 \mid n &\iff 3 \mid f_n,\\
5 \mid n &\iff 5 \mid f_n,\\
8 \mid n &\iff 7 \mid f_n.
\end{aligned}$$

Hinweis. Man betrachte die Fibonacci-Zahlen modulo p im Körper $\mathbb{Z}/p$ für $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Was sind die entsprechenden Regeln für $p = 11$ und $p = 13$?

---

b.w.

Aufgabe 12

a) Man zeige für die in Aufgabe 11 definierten Fibonacci-Zahlen:
Für alle $n \geqslant 0$ und $m \geqslant 1$ gilt

$$f_{n+m} = f_{n+1} f_m + f_n f_{m-1}$$

b) Man folgere aus a): Für alle $n, m, k \in \mathbb{N}_1$ gilt

i) $\gcd(f_n, f_m) \mid f_{n+m}$

ii) $f_n \mid f_{kn}$

Insbesondere ist f_n mit Ausnahme von $f_4 = 3$ höchstens dann prim, wenn n prim ist. Welches ist die kleinste Primzahl $p > 2$, so dass f_p nicht prim ist?
