Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2017
10. Mai 2017

Einführung in die Zahlentheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 5

Sei H_n die n-te Partialsumme der harmonischen Reihe,

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\,.$$

Man beweise: Für kein $n \geqslant 2$ ist H_n eine ganze Zahl.

Aufgabe 6

Seien $a, b > 1$ teilerfremde ganze Zahlen. Wir interessieren uns für die Menge $M_{a,b}$ aller ganzen Zahlen m, die sich als

$$m = \lambda a + \mu b \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{N}_0$$

darstellen lassen. Man beweise:

a) Die Zahl $ab - a - b$ gehört nicht zu $M_{a,b}$.

b) Jede ganze Zahl $m > ab - a - b$ gehört zu $M_{a,b}$.

c) Man bestimme explizit die Menge $M_{5,7}$.

Aufgabe 7

a) Man beweise, dass für $d = 2, 3$ die Ringe $R_d := \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ euklidisch sind bzgl. der Abbildung

$$\beta : R_d \to \mathbb{N}_0, \qquad \xi = x + y\sqrt{d} \;\mapsto\; \beta(\xi) := |N(\xi)| = |x^2 - dy^2|.$$

b) Im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ hat die Zahl 22 die Zerlegungen

$$22 = 2 \cdot 11 = (7 + 3\sqrt{3})(7 - 3\sqrt{3}).$$

Man zeige, dass die Zerlegungen wesentlich verschieden sind, d.h. die Faktoren 2 und 11 nicht zu $7 \pm 3\sqrt{3}$ assoziiert sind.
Warum ist das kein Widerspruch dazu, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ein Hauptidealring, also auch faktoriell ist?

c) Man bestimme die Primfaktor-Zerlegung des Elements 22 im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

---

b.w.

Aufgabe 8*

Für eine natürliche Zahl $n \geqslant 2$ sei $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ die Gruppe aller ganzzahligen $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1.

Für $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, und $x \in \mathbb{Z}$ definieren wir spezielle, sog. *Elementar-Matrizen* $E_{ik}(x) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ wie folgt:

$$E_{ik}(x) = (a_{\nu\mu}) \quad \text{mit} \quad a_{\nu\mu} := \delta_{\nu\mu} + x\delta_{\nu i}\delta_{j\mu}.$$

Dabei ist $\delta_{\nu\mu}$ das Kronecker-Symbol. Die Matrizen $E_{ij}(x)$ haben also eine Diagonale aus lauter Einsen und an der Stelle (i, j) den Eintrag x, während alle anderen Koeffizienten gleich null sind.

Man beweise: Jede Matrix $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ lässt sich als Produkt von endlich vielen Elementar-Matrizen darstellen.

---

* Durch eine korrekte, selbständige Lösung der Sternaufgabe kann ein Notenbonus (von 0.3) auf die Klausurnote erworben werden. Lösungen sind möglichst bald, jedoch spätestens bis zum 17. Mai 2017, entweder per Email an `forster@math.lmu.de` zu senden, oder in der Vorlesung abzugeben.