Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2017
3. Mai 2017

Einführung in die Zahlentheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Seien x, u, v, n ganze Zahlen, $n > 0$. Man beweise:

a) $\gcd(x, u) = 1 \iff \gcd(x, u^n) = 1$.

b) $(\gcd(x, u) = 1 \text{ und } \gcd(x, v) = 1) \iff \gcd(x, uv) = 1$.

c) Gilt sogar allgemeiner

$$\gcd(x, u)\gcd(x, v) = \gcd(x, uv)\ ?$$

Beweis oder Gegenbeispiel!

Aufgabe 2

Seien a, b, c ganze Zahlen $\neq 0$.

a) Es gelte $a \mid c$ und $b \mid c$. Man beweise: Falls $\gcd(a, b) = 1$, so folgt $ab \mid c$.
Man zeige, dass die Bedingung $\gcd(a, b) = 1$ nicht weggelassen werden kann.

b) Eine ganze Zahl $n \neq 0$ heißt *quadratfrei*, falls es keine Quadratzahl $k^2 > 1$ gibt mit $k^2 \mid n$.
Man zeige: Ist c quadratfrei und gilt $ab \mid c$, so folgt $\gcd(a, b) = 1$.

Aufgabe 3

a) Sei $n \geqslant 0$ eine ganze Zahl. Man beweise: Die Zahl $2^n - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn n eine Primzahl ist.

b) Seien n, m natürliche Zahlen und $d := \gcd(n, m)$. Man beweise:

$$\gcd(2^n - 1,\ 2^m - 1) = 2^d - 1.$$

Aufgabe 4

a) Man beweise: Für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ gilt

$$\gcd(n! + 1,\ (n+1)! + 1) = 1.$$

b) Man bestimme explizit ganze Zahlen λ, μ, so dass

$$\lambda(n! + 1) + \mu\,((n+1)! + 1) = 1.$$