Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2015
2. Juli 2015

Funktionentheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 41

a) Sei f eine holomorphe Funktionen in einer Umgebung des Punktes $a \in \mathbb{C}$. Man zeige

$$\operatorname{Res}_{z=a}\Big(\frac{f(z)}{z-a}\Big) = f(a)$$

und allgemeiner für $n \geqslant 0$

$$\operatorname{Res}_{z=a}\Big(\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\Big) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

b) Sei g eine weitere holomorphe Funktion in einer Umgebung von a. Man zeige: Hat g eine Nullstelle 1. Ordnung in a, so gilt:

$$\operatorname{Res}_{z=a}\Big(\frac{f(z)}{g(z)}\Big) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

c) Man gebe eine Formel für das Residuum in dem Fall an, dass g in a von 2. Ordnung (oder allgemeiner von n-ter Ordnung) verschwindet.

Aufgabe 42

Man berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx.$$

Anleitung. Man benutze $\sin^2 x = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(1-e^{2ix})$ und integriere $\dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ über eine geeignete geschlossene Kurve.

Aufgabe 43

Man berechne das Integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\log x}{1+x^2}dx.$$

Anleitung. Man integriere für $0 < \varepsilon < 1 < R$ längs derjenigen geschlossenen Kurve in $\mathbb{C}$, die sich aus den reellen Intervallen $[-R, -\varepsilon]$ und $[\varepsilon, R]$ sowie aus den oberen Halbkreisen mit Radien ε und R zusammensetzt.

---

b.w.

Aufgabe 44

Seien $a < b$ reelle Zahlen und

$$\begin{aligned} G_1 &:= \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a \text{ oder } x \geqslant b\} \\ G_2 &:= \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}. \end{aligned}$$

Man zeige:

a) G_1 ist einfach zusammenhängend; G_2 ist nicht einfach zusammenhängend.

b) Sowohl in G_1 als auch in G_2 existieren holomorphe Zweige von $\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$.

Es sei $f_1 : G_1 \to \mathbb{C}$ derjenige Zweig der Wurzel, der für $a < x < b$ positiv imaginäre Werte annimmt und $f_2 : G_2 \to G$ der Zweig der Wurzel, der für reelle $x > b$ positive Werte annimmt.

c) Man vergleiche f_1 und f_2 auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $G_1 \cap G_2$.

d) Sei $z_0 := (a+b)/2$ und $r := (b-a)/2$. Man entwickle f_1 im Kreis

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

in eine Taylorreihe und f_2 in $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(z_0)$ in eine Laurentreihe.

e) Für $R > r$ berechne man das Integral

$$\int_{|z-z_0|=R} f_2(z) dz.$$

Dieses Übungsblatt wird nicht korrigiert.